# APPROXIMATION UND FORTSETZUNG STETIGER FUNKTIONEN AUF KOMPAKTEN MENGEN

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Hochschule Darmstadt
zur Erlangung der Würde
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte

Dissertation

von

WALTER ROTH

aus Darmstadt

Referent: Prof. Dr. B. Fuchssteiner
Korreferent: Prof. Dr. W. Wendland

Tag der Einreichung: 8.12.1972
Tag der mündlichen Prüfung: 13.2.1973

D 17

Darmstadt 1973

## Inhaltsverzeichnis

## Einleitung

Ganz allgemein erscheint die Frage von Interesse, unter welchen Bedingungen zwei Mengen rell- bzw. komplexwertiger Funktionen auf einer Teilmenge ihres gemeinsamen Definitionsbereichs übereinstimmen. Der Bauersche Satz etwa ( [1] , Theorem II.4.1) in der abstrakten harmonischen Analysis ist eine Aussage dieses Typs: Er gibt Kriterien für die Übereinstimmung eines linearen Raumes stetiger reellwertiger Funktionen über einer kompakten Menge mit allen stetigen Funktionen auf dem Choquet-Rand. Dieser Fall ist besonders interessant: Wegen der bekannten Eigenschaften des Choquet-Randes (Maximum-Rand) ist die Beschränkung der Funktionen des vorgegebenen Raumes hierauf eine Isometrie, und nach Choquet-Bishop-de Leeuw ( [1] , Theorem I.5.23) existiert zu jedem Punkt des Definitionsbereiches ein darstellendes Wahrscheinlichkeitsmaß, das von jeder den Choquet-Rand enthaltenden Baire-Menge getragen wird. Konkret heißt das etwa für die Lösungsmenge einer linearen partiellen Differentialgleichung, wenn sie die konstanten Funktionen enthält und die Punkte des Definitionsbereiches trennt, daß schon die Kenntnis ihrer Werte auf dem Choquet-Rand ausreicht, um eine Lösungsfunktion mit Hilfe dieses Darstellungsmaßes auf der gesamten kompakten Menge zu berechnen. Der Bauersche Satz klärt, unter welchen Bedingungen die Vorgabe beliebiger stetiger Randwerte möglich ist. Als Beispiel sei an die stetigen Lösungen der Potentialgleichung auf dem Einheitskreis des $\mathbb{R}^2$ erinnert. Hier lassen sich beliebige stetige Funktionen auf dem topologischen Rand, der in diesem Fall mit dem Choquet-Rand übereinstimmt, harmonisch fortsetzen. Das Choquetsche Darstellungsmaß ist das Poisson-Integral.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Vergleich von Kegeln reell- bzw. komplexwertiger Funktionen auf einer kompakten Teilmenge ihres ebenfalls kompakten Definitionsbereiches. Die Fragestellung wird in zwei Komponenten zerlegt:

1. Wann bilden die Beschränkungen der Funktionen eines in der Supremum-Norm vollständigen Funktionenraumes wieder einen vollständigen Raum, und
2. wann lassen sich alle Funktionen aus einem vorgegebenen Funktionenkegel gleichmäßig durch Elemente aus einem ebenfalls vorgegebenen kleineren Funktionenkegel approximieren?

Die erste Frage ist trivial, wenn die betrachtete Vergleichsmenge ein Maximum-Rand ist. (d.h. den Choquet-Rand enthält.) Allgemein weiß man ([1], Theorem II.5.9), daß für einen linearen Raum reellwertiger stetiger Funktionen die Vollständigkeit des Raumes der Beschränkungen auf eine kompakte Teilmenge zur "beschränkten Fortsetzungseigenschaft" äquivalent ist. In einem zusammenfassenden Satz (I.1) werden hier weitere äquivalente Kriterien angegeben. Genauso wie in Satz I.2, der die zweite Frage behandelt, beziehen sich diese Kriterien auf den topologischen Dualraum, d.h. die reell- bzw. komplexwertigen Maße auf der zugrundegelegten kompakten Menge.
Die Ergebnisse erlauben die Herleitung einiger bekannter Resultate der klassischen Funktionalanalysis, die sich mit Fortsetzungsfragen beschäftigen (Satz von Rudin-Carleson, Fortsetzungseigenschaft von peak-sets bei Funktionenalgebren) und eine zusammenfassende Betrachtung neuerer Arbeiten zu diesem Thema (Taylor [7], Dufresnoy [8]).
Im dritten Teil der Arbeit wird die Theorie für reellwertige Funktionen weiterentwickelt. Wir erhalten zur Approximationseigenschaft äquivalente Kriterien für den Choquet-Rand, für die Choquet-Darstellungsmaße und die Ordnungsstruktur des betrachteten Funktionenraumes. Als Anwendungen ergeben sich Verallgemeinerungen des oben erwähnten Theorems von Bauer und des Stone-Weierstraßschen Approximationssatzes.



# I Zwei Sätze über die Fortsetzung stetiger Funktionen

## I.1 Die beschränkte Fortsetzungseigenschaft eines linearen Raumes stetiger komplexwertiger Funktionen über einer kompakten Menge

X bezeichnet in den folgenden Überlegungen eine beliebige kompakte Menge, B eine ebenfalls kompakte Teilmenge von X. M ist ein komplexer (bzw. reller) linearer Unterraum der stetigen komplex- (bzw. reell-)wertigen Funktionen $C_{\mathbb{C}}(X)$ (bzw. $C_{\mathbb{R}}(X)$ ) auf X. Wenn M in der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf X $\| \|_X$ vollständig ist, dann zeigt eine einfache Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen, daß die Vollständigkeit des Raumes der Beschränkungen von M auf B $M_{|B}$ in $\| \|_B$ (Supremumnorm auf B) äquivalent zur beschränkten Fortsetzungseigenschaft ist. (vergl. [1], II.5.9)
Der hier bewiesene Satz gibt weitere äquivalente Kriterien an. Dazu noch einige Bezeichnungen:
M' sei der topologische Dualraum des mit $\| \|_X$ normierten Raumes M, M* die Menge der Elemente von M', die bezüglich der Halbnorm $\| \|_B$ auf M stetig sind (d.h. die eine Fortsetzung zu einem von B getragenen Maß besitzen.) Die Elemente von M' sind in der üblichen Weise normiert:

$\mu \in M'$: $\quad \|\mu\| = \sup \{ |\mu(f)| \mid f \in M \text{ und } \|f\|_X \leq 1 \}$

Zu $x \in X$ sei $\varepsilon_x$ das x repräsentierende Element von M',
d.h. $\bigwedge_{f \in M} \varepsilon_x(f) = f(x)$.

**Satz I.1**

M sei ein abgeschlossener Unterraum von $C_{\mathbb{C}}(X)$ (bzw. $C_{\mathbb{R}}(X)$), S eine bezüglich der Halbnorm $\| \|_B$ in M dichte Teilmenge.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $M_{|B}$ ist abgeschlossen in C(B).

(2) M besitzt die beschränkte Fortsetzungseigenschaft, d.h. es existiert eine Zahl $N \in \mathbb{R}$, so daß

$$\bigwedge_{f \in M_{|B}} \bigwedge_{\tilde{N} > N} \bigvee_{g \in M} \left[ f = g_{|B} \text{ und } \|g\|_X \leq \tilde{N} \cdot \|f\|_B \right]$$

(3) Es existiert eine durch "$\subset$" nach unten gerichtete Familie $\{B_i\}_{i\in I}$ kompakter Teilmengen von X mit $B = \bigcap_{i\in I} B_i$, und es gibt ein $N \in \mathbb{R}$, so daß
$$\bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{f\in S} \bigwedge_{\tilde N > N} \bigvee_{g\in M} \left[ f|_{B_i} = g|_{B_i} \text{ und } \|g\|_X \le \tilde N \|f\|_{B_i} \right]$$

(4) Es existiert eine Zahl $N\in\mathbb{R}$, so daß
$$\bigwedge_{\mu\in M^*}\bigwedge_{f\in M} |\mu(f)| \le N \|\mu\| \|f\|_B$$

Aus jeder der Aussagen (2) bis (4) folgen die anderen mit demselben $N \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis:</u>

Sei $K = \{f\in M \mid f|_B = 0\}$. $E = M/K$ ist dann mit der Quotientennorm $\|\ \|_q$ ein Banachraum. (Zu $f\in M$ und dem dazugehörigen $\tilde f \in E$ ist $\|\tilde f\|_q = \inf\{\|g\|_X \mid g\in M \text{ und } g|_B = f|_B\}$.) $F = \overline{M|_B}$, der topologische Abschluß von $M|_B$ in C(B) ist ebenfalls ein Banachraum mit der Norm $\|\ \|_B$.
$\pi$ sei die Projektionsabbildung
$\pi : E \to F$ mit $\pi(\tilde f) = f|_B$.
$\pi$ ist injektiv und stetig. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ([3], § 17, prop. 17) sind dann äquivalent:
($\alpha$) $\pi$ ist surjektiv, und
($\beta$) $\pi$ ist ein Isomorphismus.
Offensichtlich ist ($\alpha$) äquivalent zu (1) aus Satz I.1, ($\beta$) zur Existenz einer Konstanten $N \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:
$$\bigwedge_{f\in M} \|f\|_B \le \|\tilde f\|_q \le N \|f\|_B$$
und damit zu (2) aus Satz I.1. (1)$\Longleftrightarrow$(2) ist also gezeigt.

Aus (2) folgt (4) mit demselben $N \in \mathbb{R}$:
$\mu$ sei ein beliebiges Element von $M^*$, $f \in M$. Wegen (2) existiert ein $g \in M$ mit $\|g\|_X \le \tilde N \|f\|_B$ und $g|_B = f|_B$ für ein beliebiges $\tilde N > N$. Dann ist $|\mu(f)| = |\mu(g)| \le \|\mu\| \|g\|_X \le \tilde N \|\mu\| \|f\|_B$.

Aus (4) folgt (2) mit demselben $N \in \mathbb{R}$:
$$\pi^* : F' \to E'$$
sei die transponierte Abbildung zu $\pi$. Wegen $F = \overline{M_B}$ besteht F' aus den Elementen von M', die bezüglich $\|\ \|_B$ stetig sind, also $F' = M^*$.



Wegen des Bipolarensatzes ist
$$\bigwedge_{f\in M} \|f\|_B = \sup\{|\mu(f)| \mid \mu\in F' \text{ und } \|\mu\|_{F'} \le 1\}$$
$$\bigwedge_{\tilde f\in E} \|\tilde f\|_q = \sup\{|\mu(\tilde f)| \mid \mu\in E' \text{ und } \|\mu\|_{E'}\le 1\}$$
Mit (4) ist $\pi^*$ ein Isomorphismus in der Norm-Topologie von E' und F':
$$\|\pi^*(\mu)\|_{E'} = \sup\{|\mu(f)| \mid \|f\|_q \le 1\}$$
$$\le \sup\{|\mu(f)| \mid \|f\|_B \le 1\} \le \|\mu\|_{F'}, \text{ und}$$
$$\|\mu\|_{F'} = \sup\{|\mu(f)| \mid \|f\|_B\le 1\} \le N\|\mu\| \text{ (wegen (4))}$$
Da $\|\mu\| = \sup\{|\mu(f)| \mid \|f\|_X \le 1\} \le \|\pi^*(\mu)\|_{E'}$, folgt
$$\|\pi^*(\mu)\|_{E'} \le \|\mu\|_{F'} \le N \|\pi^*(\mu)\|_{E'}.$$
$\pi^*$ ist also ein Isomorphismus und, da F' und E' Banachräume in der Normtopologie sind, nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen surjektiv. (Wegen der Injektivität von $\pi$ ist $\pi^*(F')$ dicht in E'.). Für ein beliebiges $\tilde f \in E$ schließt man weiter:
$$\|\tilde f\|_q \le \sup\{|\mu(f)| \mid \mu\in E' \text{ und } \|\pi^{*-1}(\mu)\|_{F'} \le N\}$$
$$= N \sup\{|\mu(f)| \mid \mu\in F' \text{ und } \|\mu\|_{F'}\le 1\} = N\|f\|_B.$$

Die Äquivalenz von (1), (2) und (4) ist damit bewiesen. Die Notwendigkeit von (3) ist ebenfalls klar. (Es werden alle $B_i$ gleich B gesetzt.) Zu zeigen ist jetzt noch:

Aus (3) folgt (4) mit demselben $N \in \mathbb{R}$:
Sei $\mu\in M^*$ und
($\alpha$) $i \in I$ sei fest gewählt, $\tilde N > N$. Zu $f \in S$ existiert $g \in M$ mit $f|_{B_i} = g|_{B_i}$ und $\|g\|_X \le \tilde N \|f\|_{B_i}$. Also, da $\mu$ bezüglich der Halbnorm $\|\ \|_B$ ($\le \|\ \|_{B_i}$) stetig ist,
$$|\mu(f)| = |\mu(g)| \le \|\mu\| \|g\|_X \le \tilde N \|\mu\| \|f\|_{B_i}.$$
($\beta$) Da $B = \bigcap_{i\in I} B_i$ und die $B_i$ durch "$\subset$" nach unten gerichtet sind, ist $\|f\|_B = \inf\{\|f\|_{B_i} \mid i\in I\}$. Wegen ($\alpha$) ist dann $|\mu(f)| \le N\|\mu\| \|f\|_B$.
($\gamma$) S ist eine in der Halbnorm $\|\ \|_B$ dichte Teilmenge von M, ($\beta$) gilt demnach auch für jede Funktion f aus M. ∎

## I.2 Approximation durch Kegel stetiger Funktionen

Eine einfache Anwendung des Hahn-Banach-Theorems gibt ein Kriterium zur Beantwortung des zweiten Teils unserer Fragestellung: Wann läßt sich eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig durch die Elemente eines vorgegebenen Funktionenkegels approximieren? ($N$ ist ein Funktionenkegel, wenn $N$ konvex ist und $\lambda N \subset N$ für jedes $\lambda \geq 0$.)
In dem Raum der komplexwertigen Maße auf B sei zu einem vorgegebenen Kegel stetiger Funktionen $N$ "$\succcurlyeq_N$" die Relation:

$$\mu \preccurlyeq_N \nu \iff \bigwedge_{f \in N} \operatorname{Re} \mu(f) \leq \operatorname{Re} \nu(f)$$

**Satz I.2**

$N$ und $M$ seien Kegel stetiger komplex- (bzw. rell-)wertiger Funktionen auf der kompakten Menge B, $N \subset M$.
Genau dann ist $N$ in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf B dicht in M, wenn für jedes komplex- (bzw. reell-) wertige Maß $\mu$ auf B gilt:

$$[\mu \succcurlyeq_N 0] \implies [\mu \succcurlyeq_M 0]$$

**Beweis:**

$C_{\mathbb{C}}(B)$ ist, versehen mit der Supremumnorm $\| \ \|_B$, ein reller topologischer Vektorraum. Eine einfache Anwendung des Hahn-Banach-Theorems zeigt, daß der topologische Abschluß $\overline{N}$ des Kegels $N$ in $C_{\mathbb{C}}(B)$ gegeben ist durch: ($C'_{\mathbb{R}}$ sei der topologische Dualraum zu $C_{\mathbb{C}}(B)$ als reellem topologischem Vektorraum.)

$$\overline{N} = \{ f \in C_{\mathbb{C}}(B) \mid \bigwedge_{z \in C'_{\mathbb{R}}} [ z(N) \geq 0 \implies z(f) \geq 0 ] \}$$

Zu jedem $z \in C'_{\mathbb{R}}$ existiert nach dem Rieszschen Darstellungssatz ein komplexwertiges (Borel-) Maß $\mu$ auf B, so daß für jede Funktion $f$ aus $C_{\mathbb{C}}(B)$ $\mu(f) = z(f) - iz(if)$, also $z(f) = \operatorname{Re} \mu(f)$.
Umgekehrt ist der Realteil eines komplexwertigen Maßes auf $C_{\mathbb{C}}(B)$ ein Element von $C'_{\mathbb{R}}$.
Da $z(N) \geq 0$ äquivalent ist zu $\mu \succcurlyeq_N 0$, folgt die Behauptung unmittelbar. ∎



## II Einige Anwendungen

### II.1 Zwei einfache Beispiele zu Satz I.2

II.1.1 $B = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$ sei der kompakte Einheitskreis in $\mathbb{C}$, $N$ der von den Funktionen $\{ z^n \}$ und $\{ -(z^n + e^z) \}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, erzeugte Funktionenkegel auf B, also

$$N = \{ \Sigma_{k=0}^n \lambda_k z^k - \Sigma_{k=0}^m \rho_k (z^k + e^z) \mid \lambda_k, \rho_k \geq 0 \}$$

($\alpha$) $N \cap (-N) = \{0\}$, denn sei

$$\Sigma_0^n \lambda_k z^k - \Sigma_0^m \rho_k (z^k + e^z) = - [ \Sigma_0^n \lambda'_k z^k - \Sigma_0^m \rho'_k (z^k + e^z) ]$$

ein Element von $N \cap (-N)$. Dann zeigt ein Koeffizientenvergleich:

1. (bei $e^z$) $-\Sigma_0^m \rho_k = + \Sigma_0^m \rho'_k$, und da alle $\rho_k, \rho'_k \geq 0$ sind, schließt man: $\rho_k = \rho'_k = 0$.
2. Genauso sieht man $\lambda_k = \lambda'_k = 0$.

($\beta$) Satz I.2 zeigt nun, daß $N$ dicht in $(N - N)$ liegt:
Sei $\mu$ ein komplexwertiges Maß auf B und sei $\mu \succcurlyeq_N 0$.
Dann ist auch $\operatorname{Re} \mu(e^z) = \operatorname{Re} \Sigma_0^\infty \mu(\frac{z^n}{n!}) = \Sigma_0^\infty \operatorname{Re} \mu(\frac{z^n}{n!}) \geq 0$, da $\frac{z^n}{n!}$ Element von $N$ ist. Andererseits liegt auch $-z^n - e^z$ in $N$, demnach ist auch $\operatorname{Re} \mu(-z^n - e^z) \geq 0$.
Es folgt $\operatorname{Re} \mu(z^n) = \operatorname{Re} \mu(e^z) = 0$, also $\mu \succcurlyeq_{N-N} 0$.

II.1.2 X sei eine beliebige kompakte Menge, A ein linearer (reell oder komplex) Raum stetiger Funktionen auf X. A enthalte die konstanten Funktionen und trenne die Punkte von X. (d.h. zu $x, y \in X$ existiert eine Funktion $f$ aus A, die auf $x$ und $y$ verschiedene Werte annimmt.) B sei der Shilov-Rand von A. Eine Anwendung von Satz I.2 führt zu dem Schluß:

Eine Funktion $f$ auf X, die punktweiser Grenzwert einer durch eine Borel - integrierbare Funktion beschränkten Folge aus A ist, ist genau dann stetig und Element von $\overline{A}$, wenn ihre Beschränkung auf B stetig in der Relativtopologie ist.

Zum Beweis dieser Bemerkung sei $N = A|_B$, $f' = f|_B$, $M = N + \mathbb{C} \cdot f'$ (bzw. $M = N + \mathbb{R} f'$, wenn $N$ ein reeller linearer Raum reellwertiger Funktionen ist.)
($\alpha$) Mit Satz I.2 sieht man, daß $N$ dicht in M liegt:

Sei $\mu$ ein Maß auf B, $\mu \succcurlyeq_N 0$. Dann ist auch $\mu \succcurlyeq_M 0$. Denn nach Voraussetzung existiert eine Folge gleichmäßig beschränkter Funktionen $f_n$ in N, die punktweise gegen f' konvergiert. Nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz ist dann auch $\lim \mu(f_n) = \mu(f')$, also $\mathrm{Re}\,\mu(f') = 0$. (Aus $\mu \succcurlyeq_N 0$ folgt $\mu \preccurlyeq_N 0$, da $N = (-N)$) Wenn A und damit N ein komplexer linearer Raum ist, schließt man auch $\mathrm{Re}\,\mu(if') = 0$, da $if' = \lim_{n\to\infty} if_n$. In jedem Fall gilt also $\mu \succcurlyeq_M 0$.

(β) B ist der Shilov-Rand von A, der topologische Abschluß $\bar{N}$ von N stimmt demnach mit $\bar{A}|_B$ überein. (Das läßt sich auch unmittelbar aus Satz I.1 schließen mit $M = \bar{A}$, wenn man bedenkt, daß für jedes f aus $\bar{A}$ $\|f\|_X = \|f\|_B$ ist.) Wegen (α) gibt es eine Funktion $h \in \bar{A}$, die auf B mit f', also auch mit f übereinstimmt.
Es ist f = h auf ganz X. Denn zu $x \in X$ existiert nach dem Darstellungssatz von Choquet-Bishop-de Leeuw[1] ein von B getragenes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_x$, so daß für jedes $g \in \bar{A}$ $\mu_x(g) = g(x)$. Also auch:

$$h(x) = \mu_x(h) = \mu_x(f) = \lim_{n\to\infty} \mu_x(f_n) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

## II.2 Eine geometrische Interpretation der beschränkten Fortsetzungseigenschaft

In Anlehnung an eine Arbeit von P. D. Taylor ([7], 1972) läßt sich das Ergebnis von Satz I.2, angewandt auf affine Funktionen auf kompakten konvexen Mengen, auch geometrisch deuten.
Satz II.2.1 zeigt im komplexen Fall den Zusammenhang zwischen der Fortsetzungskonstanten N und geometrischen Eigenschaften ("d - Breite") der betrachteten absolutkonvexen Mengen.
Satz II.2.2 ist (mit einer genaueren Bestimmung der Konstanten) die von Taylor [7] gefundene Aussage im Reellen.

Definition: (d - Breite)
K sei eine absolutkonvexe kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen (reellen oder komplexen) topologischen Vektorraumes E.
Zu $d \in E \setminus \{0\}$ ist $|K|_d = \sup\{\, t \in \mathbb{R} \mid \frac{t}{2} d \in K \,\}$ die d - Breite von K.

[1]) In diesem Fall läßt sich auch aus der (schwächeren) Aussage des Satzes von Krein-Milman auf die Existenz von $\mu_x$ schließen.



Satz II.2.1
B, X seien kompakte absolutkonvexe Teilmengen eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes E, $B \subset X$.
$M = \overline{E'|_X}$ (der topologische Abschluß in C(X) der Beschränkungen der stetigen linearen Funktionale auf E) besitzt genau dann die beschränkte Fortsetzungseigenschaft auf B mit $N \in \mathbb{R}$, wenn für jedes $d \in E \setminus \{0\}$ mit $|B|_d \neq 0$ gilt:

$$|X|_d \leq N\ |B|_d$$

Beweis:
Sei $d \in E \setminus \{0\}$ und $|X|_d \neq 0$. Dann ist $\varepsilon_d$ Element des topologischen Dualraumes von M mit der Norm:

(*) $\|\varepsilon_d\| = \sup\{\, |f(d)| \mid f \in E' \text{ und } \|f\|_X \leq 1 \,\} = 2/|X|_d$

denn:
(α) Mit $T = |X|_d/2$ ist Td Element von X (nach Definition von $|X|_d$ und wegen der Kompaktheit von X.) Für jedes $f \in M$ mit $\|f\|_X \leq 1$ ist demnach $|f(Td)| \leq 1$,
also $|\varepsilon_d(f)| = |f(d)| \leq 1/T = 2/|X|_d$.
(β) Sei $T > |X|_d/2$. Dann ist $Td \notin X$. Nach Hahn-Banach (X ist kompakt und absolutkonvex) existiert ein stetiges lineares Funktional f aus E' mit $\|f\|_X \leq 1$ und $|f(Td)| > 1$,
also $|f(d)| > \frac{1}{T}$ Demnach ist $\|\varepsilon_d\| > 1/T$ für jedes $T > |X|_d/2$.
$\Rightarrow$ $|\varepsilon_d| \geq 2/|X|_d$

Aus (α) und (β) folgt die Behauptung (*).

Zum Beweis des Satzes genügt es, die Äquivalenz der angegebenen Bedingung mit (4) aus Satz I.1 zu zeigen:
M', der topologische Dualraum von M, läßt sich in E einbetten, denn die Topologie auf $E'|_X$, die gleichmäßige Konvergenz auf der kompakten Menge $X \subset E$, ist nach Mackey-Arens gröber als eine Topologie des dualen Paares (E',E) auf E'.
$M^*$ besteht aus genau den Funktionalen $\varepsilon_d$ mit $d \in E$, für die $|B|_d \neq 0$ ist. ($M^*$ war definiert als Menge der Elemente von M', die bezüglich der Halbnorm $\|\ \|_B$ stetig sind.) Denn

1. Sei $d \in E \setminus \{0\}$ mit $|B|_d \neq 0$. Dann ist für jedes f aus E' wegen (*) $|\varepsilon_d(f)| \leq (2/|B|_d)\|f\|_B$, also $\varepsilon_d \in M^*$.

2. Sei $|B|_d = 0$. Dann existiert zu jedem $t > 0$ ein Funktional $f$ aus $E'$, so daß $\|f\|_B \le 1$ und $|f(td)| > 1$, d.h. $|\varepsilon_d(f)| = |f(d)| > 1/t$. $\varepsilon_d$ ist also nicht stetig bezüglich der Halbnorm $\|\ \|_B$.

(4) aus Satz I.1 ist die Aussage, daß für jedes $\mu \in M^*$

$\sup\{\, |\mu(f)| \mid f \in M \text{ und } \|f\|_B \le 1 \,\} \le N \|\mu\|_X$

Zusammen mit (*) folgt jetzt unmittelbar die Äquivalenz von (4) mit dem in Satz II.2.1 gegebenen Kriterium. ■

Für kompakte konvexe Teilmengen eines reellen topologischen Vektorraumes läßt sich der Begriff d - Breite in sinnvoller Weise übertragen: (Taylor [7])

<u>Definition:</u> (d - Breite)

K sei eine kompakte konvexe Teilmenge eines reellen lokalkonvexen topologischen Vektorraumes E. Zu $d \in E \setminus \{0\}$ ist

$$|K|_d = \sup\{\, t \in \mathbb{R} \mid \bigvee_{x \in K} x + td \in K \,\}$$

die d - Breite von K.

<u>Satz II.2.2</u>

B, X seien kompakte konvexe Teilmengen eines rellen lokalkonvexen topologischen Vektorraumes E, $B \subset X$. Mit M = A(X) (Menge der stetigen reellwertigen affinen Funktionen auf X) sind äquivalent:

(1) M besitzt die beschränkte Fortsetzungseigenschaft mit $N_1 \in \mathbb{R}_+$.

(2) Für jedes $d \in E \setminus \{0\}$ mit $|B|_d \neq 0$ ist $|X|_d \le N_2 |B|_d$. $(N_2\ \mathbb{R}_+$

Aus (1) folgt (2) mit $N_2 = 2N_1$, aus (2) folgt (1) mit $N_1 = 2N_2$. 1) 2)

<u>Beweis:</u>

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $0 \in B$ vorausgesetzt werden, da alle Aussagen des Satzes translationsinvariant sind.

$\tilde{B}$ bzw. $\tilde{X}$ seien die absolutkonvexen Hüllen von B bzw. X in E. Als konvexe Hülle von $B \cup (-B)$ ist $\tilde{B}$ kompakt, genauso $\tilde{X}$.

Zu jedem $d \in E$ ist

(*) $$|X|_d \le |\tilde{X}|_d \le 2\,|X|_d$$

1) Man überzeugt sich an einem konkreten Beispiel, daß diese Abschätzung für $N_1$ optimal ist (etwa $X = [0, N]$, $B = [0, 1]$)

2) Taylor [7] beweist $N_1 = 8N_2 + 1$.



Wäre $|\tilde{X}|_d > 2\,|X|_d$, dann gäbe es ein $t > |X|_d$, so daß $td \in \tilde{X}$, also, da $\tilde{X}$ die konvexe Hülle von $X \cup (-X)$ ist:

$td = \lambda x - \rho y$ mit $x, y \in X$ und $\lambda, \rho \in [0, 1]$.

Wegen der Konvexität von X und $0 \in X$ sind mit x, y auch $\lambda x$ und $\rho y$ Elemente von X. Nach Definition der d - Breite wäre dann $|X|_d \ge t$, (wegen $td = x' - y'$ mit $x', y' \in X$) offensichtlich ein Widerspruch zur Konstruktion von t.

(I) M besitze die Fortsetzungseigenschaft mit $N_1 \in R$:

Sei $f \in E'$. Dann ist $\|f\|_B = \|f\|_{\tilde{B}}$, $\|f\|_X = \|f\|_{\tilde{X}}$. Nach Voraussetzung existiert $g \in M$ mit $g|_B = f|_B$ und $\|g\|_X \le N_1 \|f\|_B$. Wegen $g(0) = f(0) = 0$ kann g mit $g(-x) = -g(x)$ auf $\tilde{X}$ fortgesetzt werden zu einer Funktion aus $\overline{E'|_{\tilde{X}}}$, und es ist $\|g\|_B = \|g\|_{\tilde{B}}$, $\|g\|_X = \|g\|_{\tilde{X}}$. Nach Satz I.1 (3) besitzt dann $\overline{E'|_{\tilde{X}}}$ bezüglich der absolutkonvexen Mengen $\tilde{X}$ und $\tilde{B}$ die beschränkte Fortsetzungseigenschaft mit $N_1$. Die Anwendung von Satz II.2.1 zeigt, daß für jedes $d \in E \setminus \{0\}$ mit $|B|_d > 0$ gilt: $|\tilde{X}|_d \le N_1\,|\tilde{B}|_d$, also mit (*)

$$|X|_d \le |\tilde{X}|_d \le N_1\,|\tilde{B}|_d \le 2N_1\,|B|_d.$$

(II) Umgekehrt sei die Voraussetzung von Satz II.2.2 erfüllt:

d sei ein beliebiges Element von $E \setminus \{0\}$ mit $|\tilde{B}|_d > 0$. Wegen (*) ist dann auch $|B|_d > 0$ und

$$|\tilde{X}|_d \le 2\,|X|_d \le 2\,N_2\,|B|_d \le 2\,N_2\,|\tilde{B}|_d,$$

d.h. (wegen Satz II.2.1) $\overline{E'|_{\tilde{X}}}$ besitzt auf $\tilde{X}$ und $\tilde{B}$ die beschränkte Fortstzungseigenschaft mit $N_1 = 2\,N_2$. Dasselbe gilt dann für $\overline{E'|_X}$ auf X und B. Wegen der Willkürlichkeit der Wahl des Nullpunktes in B (Translationsinvarianz) läßt sich demnach jede Funktion aus E' + R, die auf B eine Nullstelle besitzt, beschränkt (mit $N_1 = 2\,N_2$) fortsetzen zu einer stetigen affinen Funktion auf X. Dasselbe folgt sofort auch für jedes beliebige f aus E' + R: Denn sei f eine solche Abbildung, die auf B keine Nullstelle besitzt, also etwa überall echt positiv ist. Mit $r = \min\{\, f(x) \mid x \in B \,\} > 0$ ist nämlich $f' = f - r$ eine Abbildung aus E' + R mit Nullstelle in B und deshalb beschränkt fortsetzbar durch die affine Funktion $g \in M$.

g + r ist dann eine beschränkte Fortsetzung von f, denn:

$$\|g + r\|_X \le \|g\|_X + r \le N_1\,\|f'\|_B + r \le N_1\,[\|f'\|_B + r] = N_1\,|f|_B.$$

Die erneute Anwendung von Satz I.1 (3) (E' + R ist dicht in M) führt zur Behauptung. ■

## II.3 Einige Anwendungen in der klassischen Funktionalanalysis

### II.3.1 Der Satz von Rudin - Carleson

Als einfache Folgerung aus den Resultaten von Kapitel I ergibt sich der Satz von Rudin - Carleson (siehe etwa [5], Theorem 39, Cor. 1). Der hier bewiesene Satz II.3.1 enthält das klassische Ergebnis als Spezialfall. ($M = C(X)$)

**Satz II.3.1**

B sei eine kompakte Teilmenge der kompakten Menge X, N, M seien lineare Unterräume von $C_{\mathbb{C}}(X)$ (bzw. $C_{\mathbb{R}}(X)$), $N \subset M$. N sei vollständig mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf X.
Wenn für jedes komplex- (bzw. reell-)wertige Maß $\mu \in N^{\perp}$ ($\mu(f) = 0$ für alle f aus N) die Restriktion auf B orthogonal zu M ist, existiert zu jedem $f \in M$ und zu $\varepsilon > 0$ eine Funktion g aus N, die mit f auf B übereinstimmt und $\|g\|_X \le \|f\|_B + \varepsilon$ genügt.

**Beweis:**

(α) Aus Satz I.2 folgt sofort, daß $N|_B$ dicht in $M|_B$ liegt: Sei nämlich $\mu$ ein Maß auf B und $\mu \succeq_N 0$. Dann ist wegen $-N = N$ (und gegebenenfalls $iN = N$) $\mu \in N^{\perp}$, nach Voraussetzung damit auch $\mu \in M^{\perp}$, also $\mu \succeq_M 0$.

(β) Kriterium (4) aus Satz I.1 zeigt, daß N auf X und B die beschränkte Fortsetzungseigenschaft mit der Fortsetzungskonstanten 1 besitzt:
Sei $\mu \in N^*$. Dann besitzt $\mu$ Fortsetzungen
1. zu einem Maß $\mu_1$ auf X mit $\|\mu_1\| = \|\mu\|$ und
2. zu einem Maß $\mu_2$ auf B.
$\chi_B$ sei die charakteristische Funktion von B, d.h. $\chi_B$ verschwindet auf $X \setminus B$ und $\chi_B(x) = 1$ für alle $x \in B$.
Mit $\mu_1 - \mu_2$ ist nach Voraussetzung auch $\chi_B(\mu_1 - \mu_2)$ orthogonal zu N. Wegen $\mu_2 = \chi_B\mu_2$ stimmen deshalb $\mu_2$, $\chi_B\mu_1$ und das vorgegeben Funktional $\mu$ auf N überein.



Für eine beliebige Funktion f aus N ist dann
$|\mu(f)| = |\chi_B\mu_1(f)| = |\mu_1(\chi_B f)| \le \|\mu_1\|\,\|\chi_B f\|_X = \|\mu\|\,\|f\|_B$. ■

### II.3.2 Anwendungen in der Theorie der Funktionenalgebren

Unmittelbar aus Satz I.1 läßt sich auch ein bekanntes Ergebnis aus der Theorie der Funktionenalgebren ablesen (vergl. [6], Theorem 2.4.1): Die beschränkte Fortsetzungseigenschaft für eine Funktionenalgebra auf einem peak-set ihres kompakten Definitionsbereiches. (B ist ein peak-set der Funktionenalgebra M, wenn eine Funktion f aus M existiert, derart daß $f|_B = 1$ und $|f(x)| < 1$ für alle $x \in X \setminus B$, B ist ein schwacher peak-set, wenn es Durchschnitt einer Familie von peak-sets ist.)

**Satz II.3.2**

M sei eine (in der Supremumnorm vollständige) Funktionenalgebra über der kompakten Menge X, $B \subset X$ ein schwacher peak-set. M besitzt bezüglich B die beschränkte Fortsetzungseigenschaft mit $N = 1$.

**Beweis:**

Wegen Satz I.1. (3) genügt es, den Beweis für peak-sets zu führen; denn sei B ein schwacher peak-set und $\{B_i\}$ die Familie aller peak-sets, die B enthalten. Dann ist $B = \bigcap B_i$, und die Familie $\{B_i\}$ ist durch "$\subset$" nach unten gerichtet. (Der Durchschnitt zweier peak-sets ist, wie man leicht einsieht, wieder ein peak-set.)
Sei also B ein peak-set in X und g aus M die "peak-Funktion", d.h. $g|_B = 1$ und $|g(x)| < 1$ für alle x aus $X \setminus B$.
M besitzt dann die beschränkte Fortsetzungseigenschaft mit $N = 1$:
Sei $\mu \in M^*$ und f eine beliebige Funktion aus M. Für jede natürliche Zahl n stimmt f mit $f \cdot g^n$ auf B überein, und da $\mu$ stetig bezüglich der Halbnorm $\|\ \|_B$ ist, gilt:
$\mu(f) = \mu(f \cdot g^n)$.

$\mu$ besitzt eine Fortsetzung zu einem Maß $\mu_1$ auf X mit $\|\mu_1\| = \|\mu\|$.
Mit dem Lebesgueschen Konvergenztheorem schließt man dann: (Die Folge $f \cdot g^n$ ist gleichmäßig beschränkt und konvergiert punktweise gegen die Grenzfunktion $\chi_B \cdot f$.)

$$\mu_1(\chi_B \cdot f) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(f\, g^n) = \mu(f).$$

Daraus folgt sofort (4) aus Satz I.1 und damit die Behauptung:

$$|\mu(f)| = |\mu_1(\chi_B \cdot f)| \leq \|\mu_1\|\, \|\chi_B\, f\|_X = \|\mu\|\, \|f\|_B \qquad \blacksquare$$

Das F. u. M. - Riesz - Theorem erlaubt für Funktionenalgebren eine Vereinfachung der Bedingungen von Satz I.2. (siehe etwa [4],II.7.11) Es genügt, die dort für alle Maße auf der zugrundegelegten kompakten Menge geforderte Eigenschaft für ein Teilsystem des Maßraumes zu verifizieren.
N sei eine (in der Supremumnorm vollständige) Funktionenalgebra auf der kompakten Menge B, $\mu$ ein zu N orthogonales Maß. Nach F. u. M. Riesz besitzt $\mu$ eine Zerlegung:

$$\mu = \mu_s + \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu_n \,,$$

wobei $\mu_s$ und alle $\mu_n$ ebenfalls orthogonal zu N sind und die Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty} \mu_n$ in der Normtopologie des Maßraumes konvergiert. Jedes $\mu_n$ ist absolutstetig bezüglich eines Maßes $\Phi_n$, das auf N multiplikativ ist, $\mu_s$ ist disjunkt zu jedem solchen Maß, alle $\mu_n$ sind paarweise disjunkt. (Zwei Maße $\mu$ und $\nu$ sind disjunkt, wenn eine meßbare Teilmenge $A \subset B$ existiert, so daß $|\mu|(A) = |\nu|(B \setminus A) = 0$ ist.)
Damit jedes zu N orthogonale Maß $\mu$ auch zu einem N enthaltenden Unterraum M von $C_{\mathbb{C}}(B)$ orthogonal ist und deshalb nach Satz I.2 jede Funktion aus M gleichmäßig durch Funktionen aus der Algebra N approximiert werden kann, genügt es, daß alle oben charakterisierten Maße $\mu_s$ und $\mu_n$ dieser Bedingung genügen.

Wir wollen das an einem konkreten Beispiel erläutern:
K sei eine kompakte Teilmenge der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, und B sei der Shilov-Rand der Funktionenalgebra R(K), der hier mit dem topologischen Rand von K übereinstimmt.[1] (R(K) ist die Algebra der stetigen Funktionen auf K, die gleichmäßig durch rationale Funktionen ohne Singularitäten auf K approximiert werden können.)

---

[1]) vergl. hierzu [4], II.1.3



Nach Wilken's Theorem ([4],II.8.5) ist $\mu_s = 0$ für jedes zu R(K) orthogonale Maß $\mu$, das von B getragen wird. $N = R(K)|_B$ ist eine (vollständige) Funktionenalgebra auf B mit Spec N = Spec R(K) = K (vergl. [4], II.1.3, die Beschränkung der Funktionen auf B ist eine Isometrie von R(K) auf N.)
Sei M ein linearer Raum stetiger Funktionen auf K, der die Algebra R(K) enthält. Satz I.2 zusammen mit den vorausgegangenen Bemerkungen erlaubt dann den Schluß:
Genau dann ist $R(K)|_B = M|_B$, wenn jedes zu R(K) orthogonale von B getragene Maß $\mu = h \cdot \nu$, wobei $\nu$ von B getragenes Darstellungsmaß eines Punktes aus K ist und $h \in L_1(\nu)$, auch orthogonal zu M ist.
Ist R(K) eine Dirichlet-Algebra, dann besitzen alle Punkte z von K nur das eindeutig bestimmte Darstellungsmaß $\varepsilon_z$. (Dann ist B = K.) Aus den Überlegungen von oben schließt man für diesen Fall sofort: $R(K) = R(K)|_B = C_{\mathbb{C}}(K)$.

## II.4 Approximation auf abzählbaren Mengen

Ein interessanter Sonderfall unserer bisherigen Überlegungen tritt auf, wenn die kompakte Menge, auf der wir Fortsetzungsprobleme diskutieren, höchstens abzählbar viele Elemente besitzt. (z.B.: Eine konvergente Punktfolge mit ihrem Grenzwert) Die Kriterien der Sätze I.1 und I.2, die sich auf den Maßraum beziehen, können in diesem Fall vereinfacht werden: Es genügt, endliche Linearkombinationen von Dirac - Maßen zu betrachten.
Auf einer abzählbaren Menge $B = \{x_1, x_2, \dots\}$ besitzt jedes Maß $\mu$ eine Darstellung:

$$\mu = \Sigma_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varepsilon_{x_i}, \text{ wobei } \lambda_i = \mu(x_i) \text{ und } \|\mu\| = \Sigma_1^{\infty} |\lambda_i|$$

$\mu$ läßt sich in der Normtopologie des Maßraumes durch die "einfachen" Maße (endliche Linearkombinationen von Dirac-Maßen) $\nu_n = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_{x_i}$ approximieren. Diese Tatsache nutzen wir aus in dem folgenden Satz II.4.1. Die Konstante K in der dort formulierten Bedingung hat lediglich beweistechnische Bedeutung für Satz II.4.2. Sie kann, wie der Beweis zu II.4.1 zeigt, immer gleich 1 angenommen werden.

Satz II.4.1

N und M seien Kegel stetiger Funktionen auf der abzählbaren kompakten Menge B, $N \subset M$. Genau dann ist N dicht in M, wenn eine Konstante $K \in R_+$ existiert, so daß für jeweils endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n$ aus B und komplexe Linearfaktoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gilt:

$$\Lambda_{f \in M} \operatorname{Re} (\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n))$$
$$\leq K \sup \{ \operatorname{Re} (\lambda_1 g(x_1) + \ldots \lambda_n g(x_n)) \mid g \in N, \|g\| \leq 1 \} \|f\|_B$$

Beweis:
Die Notwendigkeit der Bedingung mit K = 1 ist offensichtlich: Zu $f \in M$ mit $\|f\| \leq 1$ ist $f' = \rho f$ mit $0 \leq \rho \leq 1$ ebenfalls Element von M und $\|f'\| < 1$. Nach Voraussetzung existiert dann $g \in N$ mit $\|g\| < 1$ und $\|g - f'\| < \varepsilon$. Die geforderte Beziehung gilt also für f' und wegen der Beliebigkeit von $\rho$ auch für f.
Zum Beweis der Hinlänglichkeit benutzen wir Satz I.2:
$\mu$ sei ein beliebiges Maß auf B. Dann existiert eine in der Normtopologie konvergente Folge einfacher Maße $\{\nu_n\}$ mit dem Grenzwert $\mu$. Es ist

1. für $f \in M$: $\mu(f) = \lim \nu_n(f)$
2. $\lim ( \sup \{ \operatorname{Re} \nu_n(g) \mid g \in N, \|g\|_B \leq 1 \}$
$= \sup \{ \operatorname{Re} \mu(g) \mid g \in N \; \|g\|_B \leq 1 \}$

Mit der Voraussetzung von Satz II.4.1 gilt also auch für $\mu$:

$$\Lambda_{f \in M} \operatorname{Re} \mu(f) \leq K \sup \{ \operatorname{Re} \mu(g) \mid g \in N, \|g\|_B \leq 1 \} \|f\|_B$$

Man sieht jetzt unmittelbar, daß die Bedingung von Satz I.2 erfüllt ist. ■

Genauso kann man die Bedingung für die beschränkte Fortsetzungseigenschaft auf einfache Maße reduziern und erhält zusammenfassend:

Satz II.4.2

B sei eine kompakte abzählbare Teilmenge der kompakten Menge X, N und M seien lineare Unterräume von C(X), $N \subset M$. N sei vollständig mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf X, K eine Konstante aus $R_+$.



Genau dann existiert zu jedem $f \in \overline{M_B}$ ein $g \in N$ mit
$f_B = g_B$ und $\|g\|_X \leq K \|f\|_B$,
wenn für je endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n$ aus B und Linearfaktoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gilt:

$$\Lambda_{f \in M} |\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)|$$
$$\leq K \sup \{ |\lambda_1 g(x_1) + \ldots + \lambda_n g(x_n)| \mid g \in N, \|g\|_X \leq 1 \} \|f\|_B$$

Beweis:
Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung ist klar.
Wegen Satz II.4.2 ist $N_B$ dicht in $M_B$. (Offensichtlich ist $\sup \{ \ldots \mid \|g\|_X \leq 1 \} \leq \sup \{ \ldots \mid \|g\|_B \leq 1 \}$.)
Außerdem besitzt N auf B die beschränkte Fortsetzungseigenschaft mit K: $\mu \in N'$ besitzt eine Fortsezung zu einem von B getragenen Maß $\mu_1$, das wegen der Abzählbarkeit von B durch eine Folge einfacher Maße approximiert werden kann. Genau wie oben schließt man aus der Gültigkeit von (4) aus Satz I.1 für einfache Maße auf die Gültigkeit für $\mu_1$ und damit für $\mu$. ■

Das Ergebnis läßt sich wie folgt interpretieren: Jede Funktion aus $\overline{M_B}$ läßt sich beschränkt mit K zu einer Funktion aus N fortsetzen, wenn dies für jede endliche Teilmenge $B_0$ von B mit derselben Konstanten K gilt. Für M = C(X) ist diese Bedingung auch notwendig: Jede stetige Funktion auf $B_0$ besitzt eine stetige Fortsetzung auf B mit derselben Norm.

Genau dann läßt sich jede stetige Funktion auf der abzählbaren kompakten Menge B beschränkt mit K zu einem Element des vollständigen Funktionenraumes N fortsetzen, wenn zu jeweils endlich vielen Punkten $x_1, \ldots, x_n$ aus B und $\psi_1, \ldots, \psi_n$ aus $[0, 2\pi]$ eine Funktion $g \in N$ existiert, so daß
$\|g\|_X \leq 1$ und $g(x_k) = \rho_k \cdot \exp(i\psi_k)$ mit $\rho_k \geq 1/K$.

Dann ist nämlich die Bedingung von Satz II.4.2 erfüllt:
Zu $\lambda_k = r_k \exp(-i\psi_k)$ ist $|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| \leq K \, |\lambda_1 g(x_1) + \ldots + \lambda_n g(x_n)|$.

Wir wollen das am Beispiel einer Funktionenalgebra erläutern. Nach A. Dufresnoy, [8], läßt sich jede stetige Funktion auf der endlichen Teilmenge $B_0 = \{ x_1, \ldots, x_n \}$ des kompakten Definitionsbereiches X beschränkt mit $K = 2/\Pi_{i \neq k} \rho(x_i, x_k)$ zu einem

Element der Funktionenalgebra M fortsetzen. Dabei ist (vergl. [8])
$\rho(x_i, x_k) = \sup \{ |f(x_k)| \mid f \in M,\ f(x_i) = 0,\ \|f\|_X \leq 1 \}$ der "pseudo-hyperbolische Abstand" von $x_i$ und $x_k$.
Für abzählbare kompakte Mengen B folgt dann nach unseren vorausgegangenen Überlegungen die Interpolation aller stetigen Funktionen auf $B \subset X$, wenn $K = 2/ \Pi \{ \rho(x_i, x_k) \mid x_i, x_k \in B,\ i \neq k \}$ endlich ist.
Sei etwa M die Kreisalgebra (d.h. die Algebra der stetigen im Inneren holomorphen Funktionen auf dem Einheitskreis von $\mathbb{C}$), $B = \{ x_1, x_2, .. \}$ eine kompakte Folge im Einheitskreis. Dann ist (vergl. [6], 2-6) $\rho(x_i, x_k) = |(\bar{x}_i - x_k)/(1 - x_i\bar{x}_k)|$. M interpoliert also auf B die stetigen Funktionen mit der Fortsetzungskonstanten $N = 2/K$, wenn $K = \Pi_{i \neq k} |(x_i - x_k)/(1 - x_i\bar{x}_k)| > 0$ ist.
Falls nur endlich viele Elemente von B nicht auf dem Rand des Einheitskreises liegen, ist die Bedingung offensichtlich erfüllt: Aus $|x_k| = 1$ folgt $\rho(x_i, x_k) = 1$.

## II.5 Approximation auf Mengen ohne topologische Struktur

Die vorausgegangenen Überlegungen basieren auf der Möglichkeit, alle Maße auf einer abzählbaren kompakten Menge B in der Normtopologie durch einfache Maße zu approximieren. Das gilt sicher nicht für beliebige Mengen B. Allgemein ist diese Approximation in der schwachen Topologie des Maßraumes möglich. Das führt zu dem folgenden allgemeinen Satz über den Vergleich von Funktionenkegeln auf einer Menge ohne topologische Struktur:

**Satz II.5.1**

N und M seien Kegel beschränkter komplexwertiger Funktionen auf einer Menge S, $N \subset M$.
N ist bezüglich der Supremumnorm auf S genau dann dicht in M, wenn für jedes gerichtete System $\{\nu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ einfacher Maße auf S, für das $\nu_\alpha = \Sigma_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \varepsilon_{x_i^\alpha}$ mit $\Sigma_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$ und $\{\nu_\alpha(f)\}$ für jede Funktion f aus M in $\mathbb{C}$ konvergiert, gilt:

$$\left[\Lambda_{f \in N} \lim \operatorname{Re} \nu_\alpha(f) \geq 0 \implies \Lambda_{f \in M} \lim \operatorname{Re} \nu_\alpha(f) \geq 0\right]$$

Falls M in der Supremumnorm separabel ist, genügt es, Folgen einfacher Maße zu betrachten.



**Beweis:**

Die Notwendigkeit der Bedingung ist unmittelbar einsichtig.
Umgekehrt sei die Voraussetzung von Satz II.5.1 erfüllt, und E bezeichne die lineare Hülle von M:
Die in E' schwach abgeschlossene absolutkonvexe Hülle von $\{ \varepsilon_s \mid s \in S \}$, die hier mit B bezeichnet wird, ist als Teilmenge der Einheitskugel von E' schwach kompakt. Die Elemente von N und M sind affine stetige Funktionen auf B, $\| \; \|_B$ stimmt mit $\| \; \|_S$ überein. Nun läßt sich Satz I.2 anwenden:
Zu einem Maß $\mu$ auf B existieren (B ist absolutkonvex) $x \in B$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, so daß $\Lambda_{f \in E}\ \mu(f) = \lambda f(x)$. Zu x findet man ein gerichtetes System $\{\nu_\alpha\}$ von Linearkombinationen aus $\{ \varepsilon_s \}$, das schwach gegen x konvergiert. Falls $\mu \succsim_N 0$ ist mit der Voraussetzung dann auch $\mu \succsim_M 0$. ■

Eine Vereinfachung des Kriteriums im vorausgegangenen Satz erreicht man für "konvexe" Mengen:

**Definition:**
Der lineare Raum reellwertiger Funktionen auf der Menge S sei punktetrennend (d.h. zu $x, y \in S$, $x \neq y$, gibt es $f \in N$ mit $f(x) \neq f(y)$ ) und enthalte die konstanten Funktionen.
S heißt N-konvex, wenn zu beliebigen $x, y \in S$, $\lambda \in [0, 1]$ ein $z \in S$ existiert, so daß

$$\Lambda_{f \in N}\ f(z) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

**Satz II.5.2**

N und M seien Kegel beschränkter reellwertiger Funktionen auf der (N-N)-konvexen Menge S.
N ist bezüglich der Supremumnorm auf S genau dann dicht in M, wenn
(1) S (M-M)-konvex ist und
(2) für je zwei gerichtete Systeme $\{x_\alpha\}$ und $\{y_\alpha\}$ von Punkten aus S, für die $\{f(x_\alpha)\}$ und $\{f(y_\alpha)\}$ für jedes $f \in M$ in $\mathbb{R}$ konvergieren, gilt:
$\Lambda_{f \in N} \lim f(x_\alpha) \geq \lim f(y_\alpha) \implies \Lambda_{f \in M} \lim f(x_\alpha) \geq \lim f(y_\alpha)$.

**Beweis:**

Die Notwendigkeit der Bedingung ist wieder klar. Die Hinlänglichkeit folgt aus Satz II.5.1, wenn man bedenkt, daß wegen der Konvexität von S jedes einfache Maß für jede Funktion aus (M-M) mit einem Maß der Form $\lambda\varepsilon_x - \rho\varepsilon_y$, $x,y \in S$ übereinstimmt. Sei also $\{\nu_\alpha\}$ ein gerichtetes System einfacher Maße mit den in Satz II.5.1 geforderten Eigenschaften. Sei $\nu_\alpha = \lambda_\alpha \varepsilon_{x_\alpha} - \rho_\sigma \varepsilon_{y_\alpha}$. Es existieren konvergente Teilsysteme $\{\lambda_\beta\}$ und $\{\rho_\beta\}$ mit $\lim_\beta \lambda_\beta = \lim_\beta \rho_\beta$. (Es ist $\bigwedge_{f\in N} \lim_\alpha \nu_\alpha(f) \geq 0$, und N enthält die konstanten Funktionen.) Da die Mengen $\{\varepsilon_{x_\beta}\}$ und $\{\varepsilon_{y_\beta}\}$ in $(M-M)'$ schwach relativkompakt sind, besitzen sie Cauchy-Teilsysteme $\{\varepsilon_{x_\gamma}\}$ und $\{\varepsilon_{y_\gamma}\}$, also:

$$\bigwedge_{f\in N} \lim f(x_\gamma) \geq \lim f(y_\gamma)$$

Nach Voraussetzung gilt dieselbe Beziehung für jedes $f \in M$, also:

$$\bigwedge_{f\in M} \lim \nu_\gamma(f) \geq 0.$$

Es folgt die Behauptung, wenn man bedenkt, daß $\{\nu_\alpha(f)\}$ als konvergent vorausgesetzt war für jedes $f \in M$. ■

Für lineare Räume N und M läßt sich noch formulieren:

Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz II.5.2 seien N und M linear, und S sei kompakt in der von N erzeugten initialen Topologie.
N ist in der Supremumnorm auf S genau dann dicht in M, wenn
(1) S M-konvex ist und
(2) die Funktionen aus M stetig in der von N erzeugten initialen Topologie auf S sind.

Man erhält diese Aussage sofort aus Satz II.5.2, wenn man bedenkt, daß wegen der Kompaktheit von S (in der initialen Topologie die Cauchy - Folgen $\{x_\alpha\}$ und $\{y_\alpha\}$ gegen dasselbe Element $z \in S$ konvergieren.

Sei zum Beispiel X eine kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes, E ein linearer punktetrennender Raum stetiger affiner Funktionen auf X.
$f \in \overline{E}$ ist dann äquivalent zu: f ist stetig und affin.



## III Weiterführung der Theorie für reellwertige Funktionen

Das Resultat von Satz I.2 wird in diesem Kapitel für Kegel reellwertiger stetiger Funktionen auf einer kompakten Menge weiter untersucht und präzisiert, insbesondere im Hinblick auf die Darstellungstheorie von Choquet - Bishop - de Leeuw. (Alfsen [1] oder Phelps [6]) Wir erhalten Verallgemeinerungen der Sätze von Alfsen ([1], Theorem II.4.5), Bauer ([1], Theorem II.4.1) und des klassischen Stone - Weierstraßschen Approximationssatzes.

Im folgenden sind N und M "zulässige Kegel" (vergl. [1], I.5), d.h. punktetrennende Kegel stetiger reellwertiger Funktionen auf der kompakten Menge B, die konstanten Funktionen enthaltend.
$N^c$ sei die Menge der Funktionen auf B, die punktweises Supremum endlich vieler Funktionen aus N sind.
$\Omega_B$ bezeichnet die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf B.
$\prec_N$ ist die Relation auf $\Omega_B$:

$$\mu \prec_N \nu \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{f\in N} \mu(f) \leq \nu(f)$$

$\prec_{N^c}$ ist eine Halbordnung auf $\Omega_B$. Zu jedem $\mu \in \Omega_B$ existiert ein $N^c$-maximales (maximal in $\prec_{N^c}$ ) Maß $\nu \in \Omega_B$ mit $\nu \succ_{N^c} \mu$. ([1], I.5)
Die $N^c$-maximalen Maße auf B werden von jeder den Choquet - Rand enthaltenden Baire - Menge getragen.
Der Choquet - Rand $Ch_B(N)$ von N auf B ist definiert durch:

$$Ch_B(N) = \{ x \in B \mid \bigwedge_{\mu\in\Omega_B} [\mu \succ_N \varepsilon_x \Longrightarrow \mu = \varepsilon_x ] \}$$

Zu $f \in C(B)$ sei:

$$\overline{f}_N = \inf \{ h \in -N \mid h > f \} \qquad \underline{f}_N = \sup \{ h \in N \mid h < f \}$$

$\overline{f}_N$ bzw. $\underline{f}_N$ sind ober- bzw. unterhalbstetig auf B und stimmen auf $Ch_B(N)$ mit f überein. Für $N^c$-maximale Maße $\mu$ ist $\mu(f) = \mu(\overline{f}_N) = \mu(\underline{f}_N)$.

## III.1 Ein Approximationssatz: Bedingungen für maximale Maße

### Satz III.1.1

$M$ sei ein linearer Raum stetiger reellwertiger Funktionen auf der kompakten Menge $B$, $N$ ein zulässiger Kegel in $M$. $N$ ist in der Supremumnorm auf $B$ genau dann dicht in $M$, wenn

(1) $\bigwedge_{\mu,\nu \in \Omega_B,\ \mu,\nu\ N^c\text{-maximal}} \left[ \mu \succ_N \nu \implies \mu \succ_M \nu \right]$

und eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(2a) Jedes $M^c$-maximale Maß aus $\Omega_B$ ist auch $N^c$-maximal.

(2b) $\bigwedge_{f \in M} \underline{f}_N = \sup \{ h \in N \mid h < f \} = f$

Falls $X$ metrisierbar oder falls $Ch_B(M)$ kompakt [1]) ist, können (2a) bzw. (2b) ersetzt werden durch

(2c) $Ch_B(N) = Ch_B(M)$

**Beweis:**

Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingungen ist offensichtlich, die Hinlänglichkeit folgt aus Satz I.2:

($\alpha$) $\sigma$ sei ein reelles Maß auf $B$, $\sigma \succ_N 0$. Zu zeigen ist: $\sigma \succ_M 0$. Der Fall $\sigma = 0$ ist trivial. $\sigma \neq 0$ besitzt eine Zerlegung in positive Maße: $\sigma = \sigma_+ - \sigma_-$. Wegen $\pm 1 \in N$ ist $\sigma_+(1) = \|\sigma_+\| = \sigma_-(1) = \|\sigma_-\|$. $\mu = \sigma_+/\|\sigma_+\|$ und $\nu = \sigma_-/\|\sigma_+\|$ sind dann Wahrscheinlichkeitsmaße auf $B$ und $\sigma$ besitzt die Darstellung:

$$\sigma = \|\sigma_+\| (\mu - \nu)$$

Es ist $\mu \succ_N \nu$, und zum Beweis des Satzes ist zu zeigen, daß auch $\mu \succ_M \nu$ gilt.

($\beta$) (1) und (2a) seien erfüllt:
Sei $\mu'$ $M^c$-maximal und $\mu' \succ_{M^c} \mu$
$\nu'$ $M^c$-maximal und $\nu' \succ_{M^c} \nu$
Mit Voraussetzung (2a) sind $\mu'$ und $\nu'$ dann auch $N^c$-maximal und $\mu' \succ_{N^c} \mu$ und $\nu' \succ_{N^c} \nu$. (wegen $N^c \subset M^c$)
Da $M$ ein linearer Raum ist, ist "$\preccurlyeq_M$" eine Äquivalenzrelation "$\sim_M$", und man schließt:

$$\left.\begin{array}{l} \mu' \sim_M \mu \\ \nu' \sim_M \nu \end{array}\right\} \implies (\text{da } N \subset M) \quad \bigwedge_{f \in N} \mu'(f) = \mu(f) \geq \nu(f) = \nu'(f)$$

[1]) Es genügt hier zu fordern, daß $Ch_B(M)$ $\sigma$-kompakt ist: B. Fuchssteiner hat in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit [11] bewiesen, daß ein maximales Maß von jeder den Choquet-Rand enthaltenden $\sigma$-kompakten Menge getragen wird.



Demnach ist $\mu' \succ_N \nu'$ und wegen (1) auch $\mu' \succ_M \nu'$ und damit $\mu \succ_M \nu$. Mit ($\alpha$) folgt in diesem Fall die Behauptung.

($\gamma$) Aus (2b) folgt (2a), denn
zu $f \in M$ ist die Menge $\{ h \in N^c \mid h < f \}$ nach oben gerichtet und konvergiert wegen (2b) punktweise gegen die stetige Grenzfunktion $f$ auf der kompakten Menge $B$.
Nach Dini's Lemma ist die Konvergenz gleichmäßig, und $f$ ist Element von $\overline{N}^c$. $M$ und damit auch $M^c$ sind Teilmengen von $\overline{N}^c$. $N^c$ und $M^c$ definieren auf $\Omega_B$ dieselbe Halbordnung.

($\delta$) Sei $X$ metrisierbar oder $Ch_B(M)$ kompakt. Aus $Ch_B(N) = Ch_B(M)$ folgt dann sofort (2a), da in diesem Fall ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $B$ genau dann $N^c$- (bzw. $M^c$-) maximal ist, wenn es von $Ch_B(N)$ (bzw. $Ch_B(M)$) getragen wird. (vergl. [6], Cor. 9.8) ■

Als Spezialfall von III.1.1 erhält man ein von Alfsen bewiesenes Resultat über affine Funktionen auf einer kompakten konvexen Menge. ( [1], Theorem II.4.5)

### Korollar III.1.2

$K$ sei eine kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes, $Ex(K)$ die Menge ihrer Extremalpunkte, $f: Ex(K) \to R$ eine (in der Relativtopologie auf $Ex(K)$) stetige beschränkte Funktion.
Genau dann kann $f$ zu einer stetigen affinen Funktion auf $K$ fortgesetzt werden, wenn

(1) $\overline{f} = \underline{f}$ auf $\overline{Ex(K)}$ $\quad \left( \overline{f} = \inf \{ g \mid g \text{ ist affin und stetig auf } K \text{ und } g > f \} \right)$
und

(2) für je zwei in der von den konvexen Funktionen erzeugten Halbordnung maximale Maße $\mu, \nu$ gilt:
$\bigwedge_{g \text{ affin, stetig}} \mu(g) = \nu(g) \implies \mu(\overline{f}) = \nu(\overline{f})$

**Beweis:**

Sei $B = \overline{Ex(K)}$, $A$ die Menge der affinen stetigen Funktionen auf $K$, $N = A|_B$ und $M = N + \mathbb{R}\cdot f$, wobei $f = \overline{f}|_B = \underline{f}|_B$ stetig auf $B$ ist.
Offensichtlich ist $N$ vollständig in der Supremumnorm auf $B$,

$\mu(\overline{f}_N) = \inf\{\, \mu(h) \mid h \in -N,\ h > f \,\}$
$\quad \le \inf\{\, \nu(h) \mid h \in -N,\ h > f \,\}$.

(γ) Sei $F = \{\, (f,f) \mid f \in M \,\}$ die Diagonale in $M \times M$ und
$\psi_o: F \to R,\quad \psi_o(f,f) = \mu(f)$.
Dann ist
$\psi_o(f,f) = \mu(f) \le \mu(\overline{f}_N) \le \nu(\overline{f}_N) = \Phi(f,f)$

(δ) $\psi_o$ ist linear auf F und besitzt nach Hahn - Banach eine lineare Fortsetzung auf $M \times M$:
$\psi: M \times M \to R \quad$ mit $\quad \psi \le \Phi$.

(ε) Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_1, \mu_2$ auf B, so daß
$\bigwedge_{f\in M} \mu_1(f) = \psi(f,0)/\lambda_1$ und $\mu_2(f) = \psi(0,f)/\lambda_2$.
Dann ist
$\bigwedge_{f\in M} \mu(f) = \psi_o(f,f) = \psi(f,f) = \lambda_1\mu_1(f) + \lambda_2\mu_2(f)$ und
$\bigwedge_{f\in -N} \mu_1(f) = \psi(f,0)/\lambda_1 \le \Phi(f,0)/\lambda_1 = \nu_1(\overline{f}_N) = \nu_1(f)$
also $\nu_1 \succ_N \mu_1$ und genauso $\nu_2 \succ_N \mu_2$. $\blacksquare$

<u>Satz III.2.2</u>

M sei ein linearer Raum stetiger reellwertiger Funktionen auf der kompakten Menge B, N ein zulässiger Kegel in M.
N ist genau dann dicht in M, wenn
(1) Für jede Funktion f aus M die Menge
$\{\, g \in N \mid g < f \,\}$
nach oben gerichtet ist und
(2) $Ch_B(N) = Ch_B(M)$

<u>Beweis:</u>

Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar, die Hinlänglichkeit folgt mit Lemma III.2.1 und Satz III.1.1:
Sei $R = \{\, (\nu,\mu) \in M' \times M' \mid \mu,\nu \ge 0,\ \|\mu\| = \|\nu\| = 1,\ \nu \prec_N \mu \,\}$
$\quad S = \{\, (\mu,\mu) \in M' \times M' \mid \mu \ge 0,\ \|\mu\| = 1 \,\}$.
R und S sind konvexe kompakte Mengen (in der schwachen Topologie von $M' \times M'$), und es ist $S \subset R$. Wegen Satz III.1.1 ((α) im Beweis) genügt es jetzt zu zeigen, daß $S = R$.



Dazu genügt der Nachweis, daß $Ex(R) \subset S$:
Nach Lemma III.2.1 ist aber
$Ex(R) \subset \{\, (\varepsilon_x,\mu) \in R \mid x \in Ch_B(M) \,\}$,
denn alle Elemente von M', die verschieden von $\varepsilon_x$ mit $x \in Ch_B(M)$ sind, lassen sich als konvexe Kombination zweier anderer Elemente von M' darstellen.
Nach Voraussetzung ist aber $Ch_B(N) = Ch_B(M)$, und man schließt:
$(\varepsilon_x,\mu) \in R \Rightarrow \varepsilon_x \prec_N \mu \Rightarrow \varepsilon_x = \mu \Rightarrow (\varepsilon_x,\mu) \in S$
Ex (R) ist also Teilmenge von S, und aus $S = R$ folgt die Behauptung. $\blacksquare$

Unter der schwächeren Voraussetzung "M ist ein zulässiger Kegel" gilt die Behauptung von Satz III.2.2 nicht mehr:
Sei etwa B der kompakte Einheitskreis im $R^2$, N der zulässige Kegel der stetigen konvexen Funktionen auf B, M der Kegel der stetigen subharmonischen Funktionen (beliebige Suprema stetiger im Innern von B harmonischer Funktionen) auf B.
Es ist $N \subset M$, N maximumstabil und damit (1) aus Satz II.2.2 trivialerweise erfüllt, und es gilt $Ch_B(N) = Ch_B(M)$.
Trotzdem ist offensichtlich $N \neq M$.

## <u>III.3 Anwendung auf den Fall $M = C(X)$</u>

Für den Fall $M = C(X)$ ergeben sich aus den Sätzen des vorigen Abschnitts Verallgemeinerungen der Sätze von Bauer und des klassischen Stone - Weierstraß - Theorems.

<u>Satz III.3.1</u>

N sei ein zulässiger Kegel stetiger Funktionen auf der kompakten Menge B. Dann sind äquivalent:
(1) N ist in der Supremumnorm dicht in C(B).
(2) $\overline{N}$ ist maximumstabil, d.h. $N^c \subset \overline{N}$ und
$Ch_B(N) = Ch_B(N-N)$.
(3) $\bigwedge_{f,g\in N} \inf\{\, h \in N \mid h > f \vee g \,\} \in \overline{N}$ (f∨g ist das punktweise sup von f u. g)
und $Ch_B(N) = Ch_B(N-N)$
und $\overline{Ch_B(-N)} = B$

**Beweis:**

Die Implikationen (1) $\Longrightarrow$ (2) und (1) $\Longrightarrow$ (3) sind trivial.

Sei (2) erfüllt:

Nach Satz III.2.2 ist N dicht in N-N, $\overline{N}$ ist also ein linearer Raum. Wegen $N^c \subseteq \overline{N}$ gilt dann auch $N^c - N^c \subset \overline{N}$. $N^c - N^c$ ist aber nach dem klassischen Stone - Weierstraß - Theorem dicht in C(X), demnach auch N.

Sei (3) erfüllt:

Dann ist $N^c \subset \overline{N}$, und damit gilt (2). Denn seien f, g Funktionen aus N. Dann ist

$$h = \overline{f \vee g}_{(-N)} = \inf \{ j \in N \mid j > f \vee g \} \in \overline{N}.$$

Wegen $h|_{Ch_B(-N)} = \overline{f \vee g}_{(-N)}|_{Ch_B(-N)} = f \vee g|_{Ch_B(-N)}$ und da $Ch_B(-N)$ eine dichte Teilmenge von B ist und h und $f \vee g$ stetige Funktionen sind, gilt $h = f \vee g$ auf ganz B. ■

Zusammenfassend erhalten wir eine Verallgemeinerung des Bauerschen Satzes für Kegel stetiger Funktionen:

**Satz III.3.2**

N sei ein in der Supremumnorm vollständiger zulässiger Kegel stetiger reellwertiger Funktionen auf der kompakten Menge X. Sei $B = \overline{Ch_X(N-N)}$. Dann sind äquivalent:

(1) $N|_B = C(B)$

(2) Für alle $N^c$-maximalen Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu$, $\nu$ auf B gilt:

$$\mu \succ_N \nu \implies \mu = \nu,$$

und es ist $Ch_X(N) = B$.

(3) $\bigwedge_{f,g \in N} \inf \{ h \in N \mid h > f \vee g \} \in N$ und $Ch_X(N) = Ch_X(N-N)$ und $\overline{Ch_X(-N)} = \overline{Ch_X(N)}$.

**Beweis:**

Offensichtlich ist $N|_B$ abgeschlossen in C(B).

Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt unmittelbar aus Satz III.1.1. (1) $\Longrightarrow$ (3) ist ebenfalls klar.



Zum Nachweis der Implikation (3) $\Longrightarrow$ (1) betrachten wir zwei beliebige Funktionen f und g aus N. Wegen (3) existiert $h \in N$ mit $h = \inf \{ j \in N \mid j > f \vee g \}$.

Wegen $\overline{Ch_X(-N)} = \overline{Ch_X(N)} = B$ gilt $h|_B = f \vee g|_B$. $N|_B$ ist maximumstabil, und mit Satz III.3.1 (2) folgt die Behauptung. (Offensichtlich ist $Ch_B(N) = Ch_X(N)$.) ■

Für eine reichhaltige Klasse von Gebieten des $R^n$ ist bezüglich der Lösungsräume der Potential- bzw. Wärmeleitungsgleichung die Gültigkeit der Bedingung (2) des vorigen Satzes bekannt. (vergl. [13]) Der Choquet - Rand stimmt dann mit der Menge der "regulären Punkte" (vergl. [12] oder [13]) überein, und die abstrakten Aussagen des Bauerschen Satzes garantieren die Lösbarkeit des Dirichlet - Problems.

## Literaturangaben


[1] E. M. Alfsen: Compact Convex Sets and Boundary Integrals. Springer, Berlin 1971

[2] Robert R. Phelps: Lectures on Choquet's Theorem. D. van Nostrand Company, Inc., Princeton 1966

[3] John Horvath: Topological Vector Spaces and Distributions. Addison - Wesley, 1969

[4] Theodore W. Gamelin: Uniform Algebras. Prentice - Hall, Inc., 1969

[5] Gerald M. Leibowitz: Lectures on Complex Function Algebras. Scott, Foresman and Company, 1970

[6] Andrew Browder: Introduction to Function Algebras. W. A. Benjamin, Inc., New York 1968

[7] Peter D. Taylor: The Extension Property for Compact Convex Sets. Isreal J. Math., Vol. 11, 1972

[8] Alain Dufresnoy: Sur les compacts d'interpolation du spectre d'une algèbre uniforme et la propriété d'extension linéaire bornée. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971

[9] P. L. Duren and D. L. Williams: Interpolation Problems in Function Spaces. Journal of Functional Analysis, Vol. 9, No. 1, 1972

[10] W. Roth: Charakterisierung eines linearen Raumes stetiger Funktionen über einer kompakten Menge durch ihre Beschränkungen auf den Choquet- Rand, Darmstadt 1971





[11] B. Fuchssteiner: Subadditive Funktionale- Vortrag in Oberwolfach, Funktionalanalysistagung, 1. 10. - 6. 10. 72

[12] H. Bauer: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Lecture Notes 22, Springer 1966

[13] E. G. Effros u. J. L. Kazdan: Applications of Choquet Simplexes to Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems. Journal of Differential Equations, 8, 95 - 134 (1970)


## Originalliteratur


[14] G. Choquet: Existence unicité des représentations intégrales au moyen des points extrêmaux dans les cônes convexes. Séminaire Bourbaki, 139, 1956

[15] E. Bishop u. K. de Leeuw: Ann. Inst. Fourier, 9, 1959, S. 305-331

[16] H. Bauer: Silovscher Rand und Dirichletsches Problem. Ann. Inst. Fourier, 11, 1961, S. 89-136

Lebenslauf

Ich wurde am 18. April 1947 in Darmstadt als Sohn des kaufmännischen Angestellten Wilhelm Roth und seiner Ehefrau Irma, geb. Greim, geboren. Nach dem Besuch der Volks- und Realschule wechselte ich 1963 an das Justus - Liebig - Gymnasium über, wo ich 1966 die Reifeprüfung ablegte. Von 1966 bis 1971 studierte ich an der Technischen Hochschule Darmstadt und legte dort die Diplomprüfung in Mathematik ab. Seit Juli 1971 bin ich wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt.

Meinen Lehrern, insbesondere Prof. Dr. Fuchssteiner und Prof. Dr. Osorio, bin ich zu Dank verpflichtet.