Kostenminimale Flüsse in endlichen und unendlichen Netzwerken

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
im Fachbereich Mathematik-Informatik
der Universität-Gesamthochschule Paderborn

vorgelegt von

Karsten Morisse

Paderborn, 1996

Gutachter: Prof. Dr. B. Fuchssteiner
Prof. Dr. W. Dangelmaier
Prof. Dr. J. von zur Gathen

Eingereicht am: 22. September 1995
Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 1996

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Zweifelsfrei ist die Optimierung — sei es nun in der Mathematik, Ökonomie, Sozialwissenschaft, Technik oder einer anderen Disziplin — seit jeher eines der Hauptziele der Gesellschaft. Unabhängig von allen Fachspezifika, geht es stets um die Auswahl einer besten (größten, kleinsten, günstigsten, profitabelsten,...) aus einer Vielzahl möglicher Konfigurationen.

Ein wichtiges Teilgebiet der mathematischen Optimierung ist die Bestimmung von Flüssen in Netzwerken. Ein Grund für das ausgeprägte Interesse an diesem Gebiet ist die Tatsache, daß wir im täglichen Leben in vielfältiger Weise mit Netzwerken konfrontiert werden, und daß eine Fülle von Problemstellungen mit Hilfe von Netzwerken modelliert werden können. Als Beispiele seien genannt: Straßen*netzwerke* zur Beförderung von Fahrzeugen, Telekommunikations*netzwerke* zum Austausch von Daten sowie *Netzwerke* zur Energieversorgung (Strom, Gas). Diese und viele weitere Modelle haben eines gemeinsam — stets geht es darum, ein Gut (Fahrzeug, Nachricht etc.) von einem Startpunkt zu einem Zielpunkt durch das zugrundeliegende Netzwerk zu befördern.

Ein zweiter Punkt, der für das Interesse an der Netzwerktheorie spricht, ist die Interdisziplinarität des Gebietes. Fragestellungen der unterschiedlichsten Fachgebiete — wie beispielsweise aus der diskreten Mathematik, der Informatik, den Ingenieurwissenschaften, der Ökonomie oder dem Operations Research — können als Netzwerk-flußproblem behandelt werden. Es gibt wohl wenige Disziplinen, in denen Netzwerke nicht auf die ein oder andere Weise eine Rolle spielen.

Die fundamentalen Ergebnisse der endlichen Netzwerkflußtheorie gehen auf GALE und FORD & FULKERSON zurück und sind erstmalig in [18] zusammenfassend dargestellt.

Eine wichtige Fragestellung ist die Existenz von Gleichgewichten:

> Gegeben ist ein Netzwerk N, bestehend aus Anbietern A und Konsumenten K. Jeder Anbieter $i \in A$ hat ein gewisses Angebot $\alpha(i)$; jeder Konsument $j \in K$ hat einen Bedarf $\beta(j)$. Verbunden sind die Akteure durch ein System von Leitungen, die mit einer beschränkenden Kapazität τ behaftet sind. Die Frage ist nun, unter welchen Bedingungen ein Fluß von den Anbietern zu den Konsumenten existiert, der sowohl das Angebot α und den Bedarf β berücksichtigt, aber auch die vorgegebenen Leitungskapazitäten nicht übersteigt.

GALE [28] hat diese Frage beantwortet, indem er die Äquivalenz der Existenz eines solchen Flusses mit der Gültigkeit der Bedingung

$$\beta(X) - \alpha(X) \leq \tau(\mathcal{C}X \times X) \quad \forall X \subset A \cup K$$

gezeigt hat (siehe Satz 2.1.2).

Zentrales Hilfsmittel bei der Charakterisierung extremaler Flüsse ist die auf J. VON NEUMANN zurückgehende Dualitätstheorie der linearen Optimierung. So ist beispielsweise der MaxFlow-MinCut-Satz von FORD & FULKERSON [17, 18], der maximale Flüsse in Netzwerken mit Hilfe von Schnitten charakterisiert, lediglich eine Anwendung des starken Dualitätssatzes [30].

Eine in der Praxis wichtige Anwendung erhält man, wenn man in der Situation des Satzes von GALE die Leitungen zusätzlich mit einer linearen Kostenfunktion versieht und dann nach einem kostenminimalen Versorgungsfluß fragt. Ein dem MaxFlow-MinCut-Satz analoger Satz läßt sich dann ebenfalls mittels des Dualitätssatzes für diese Situation kostenminimaler Flüsse herleiten (siehe Satz 2.1.3).

Die in [18] behandelten Fragestellungen beschränken sich alle auf den Fall endlicher Netzwerke, d.h. Netzwerke mit einer endlichen Knotenmenge. Ist man jedoch beispielsweise an der dynamischen Entwicklung von Netzwerken interessiert, möchte man also das Verhalten eines Netzwerksystems mit der Zeit untersuchen, und dabei die Knoten des Netzwerkes mit einem zusätzlichen Zeitparameter versehen, so gelangt man zu Netzwerken mit abzählbar unendlicher oder überabzählbarer Knotenmenge. Die klassische Theorie ist somit nicht mehr anwendbar, da sich die meisten Beweise in der endlichen Situation auf diskrete und kombinatorische Argumente stützen, die auf diese neuartige Situation nicht übertragen werden können.

FUCHSSTEINER hat dieses Problem in einer Reihe von Arbeiten untersucht [21, 22, 26][1] und dabei eine abstrakte, verallgemeinerte Fassung des Satzes von GALE präsentiert, der nicht mehr an eine endliche Knotenmenge gebunden ist. Zentrales Hilfsmittel beim Beweis ist dabei eine abstrakte Version des Strassen'schen Desintegrationssatzes [48].

Der Desintegrationssatz selbst kann als die maßtheoretische Verallgemeinerung des Summensatzes[2] von KÖNIG (siehe z.B. [42]) angesehen werden. Letzterer zeigt bei Gültigkeit von

$$\mu \leq p_1 + \ldots + p_n$$

auf einem nichtleeren Teilraum K eines reellen Vektorraumes E, wobei μ eine lineare Abbildung auf E und $p_1, \ldots, p_n$ monotone, sublineare Funktionale auf E sind, die Existenz monotoner, linearer $\mu_1, \ldots, \mu_n$ auf E mit $\mu_i \leq p_i$ auf E und $\mu \leq \mu_1 + \ldots + \mu_n$ auf K. Die Verwendung des Desintegrationssatzes als entscheidendes Hilfsmittel führte zu der Begriffsbildung *Netzwerk-Desintegrationstheorie.*

Eine auch für unendliche Knotenmengen gültige Fassung des MaxFlow-MinCut-Satzes haben KÖNIG & NEUMANN [42, 45] vorgestellt.

Eine in der Theorie und Praxis wichtige Fragestellung ist, wie schon gesagt, der Fall endlicher Netzwerke mit Kostenfunktion. Es war bislang unbekannt, ob sich die Aussage der Charakterisierung kostenminimaler Flüsse in endlichen Netzwerken in entsprechender Weise auch auf die Situation unendlicher Netzwerke übertragen läßt. Dieser Fragestellung ist ein Teil der vorliegenden Arbeit gewidmet. Bei der Untersuchung dieser Frage erzielen wir zwei weitreichende Verallgemeinerungen klassischer Resultate auf unendliche Netzwerke. Die entsprechenden Flüsse mit minimalen Ko-

---

[1] Eine zusammenfassende Darstellung findet sich in [24].

[2] Hier in der Fassung für reelle Vektorräume formuliert. Der Satz läßt sich allgemeiner auch für konvexe Kegel formulieren (siehe z.B. [24]).

sten stellen sich auch bei unendlichen Knotenmengen als die unter geeigneten Preissystemen höchst-profitablen Flüsse heraus. Da höchst-profitable Flüsse nicht automatisch maximal sein müssen, ist der Untersuchung der sich aus dieser Beobachtung ergebenden optimalen Preissysteme ein weiterer Teil der Arbeit gewidmet.

Der Desintegrationssatz basiert in der Formulierung für Vektorräume auf dem Satz von Hahn-Banach und in der abstrakten Kegelversion auf dem Sandwich-Satz und ist damit lediglich eine reine Existenzaussage und beinhaltet keinerlei konstruktive Aspekte. Dies ist in der Anwendung der Netzwerkflußtheorie natürlich zutiefst unbefriedigend, da man zumindest im endlichen Fall nicht nur an der Existenz von Flüssen, sondern auch an der tatsächlichen Konstruktion solcher interessiert ist. Diesem Gesichtspunkt ist ein weiterer Teil der Arbeit gewidmet.

Im folgenden geben wir nun einen kurzen Überblick über den Aufbau der Arbeit.

Im ersten Kapitel stellen wir in aller Kürze die für die Arbeit wesentlichen Ergebnisse der Theorie von Flüssen in endlichen Netzwerken und der Netzwerk-Desintegrationstheorie zur Behandlung unendlicher Netzwerke vor. Zum besseren Vergleich beider Ansätze ziehen wir auch für die Theorie endlicher Netzwerke eine maßtheoretische Beschreibung vor. Als einzig neues Ergebnis dieses Kapitels kann man die Minimalitätsaussage für dominante Fortsetzungen linearer Funktionale ansehen (Satz 2.2.5(2)).

Eines der Kernelemente der Netzwerk-Desintegrationstheorie ist das abstrakte Fluß-Theorem, welches die Existenz eines Flusses unter gewissen Randbedingungen beschreibt und damit eine Verallgemeinerung des Satzes von Gale ist. Beim Beweis dieses Satzes wurde von Fuchssteiner an entscheidender Stelle der Desintegrationssatz verwendet, so daß der Satz selbst auf ein nichtalgorithmisches Niveau gehoben wird. In Abschnitt 3.1 wird deshalb ein transparenterer Beweis des Fluß-Theorems angegeben, der ohne den Rückgriff auf den abstrakten Desintegrationssatz auskommt, und der sich stattdessen nur auf die funktionalanalytischen Grundlagen stützt. Gleichzeitig wird dabei das Fluß-Theorem durch Einführung eines Kostenmodells verallgemeinert. Zu diesem Zweck wird zunächst der Fall einer Kostenfunktion betrachten, welche absolut-integrabel bezüglich des Kapazitätsmaßes ist[3)]. Als Anwendung des resultierenden Satzes wird ein Produktions- und Verteilungsproblem charakterisiert.

[3)]Das Ergebnis dieses Abschnittes ist in [25] publiziert.

In den Abschnitten 3.2 und 3.3 werden wir untersuchen, inwieweit kostenminimale Flüsse konstruktive Beurteilungskriterien für die Maximalität von Flüssen enthalten.

Die Beschränkung auf L^1-Kostenfunktionen in Abschnitt 3.1 ist insofern unbefriedigend, als daß man sich bei der Untersuchung dynamischer Entwicklungen eines Netzwerkes auf Netzwerke mit zeitlich abklingenden Kostenfunktionen einschränken muß. Der Beseitigung dieses Nachteils widmen wir uns in Abschnitt 3.4; als Resultat erhalten wir eine abstrakte Version der Netzwerkflußresultate mit Kostenfunktion auf Vektorverbänden.

In Kapitel 4 widmen wir uns dem Problem, daß durch Verwendung des Sandwich-Satzes und des Desintegrationssatzes die konstruktiven Teile in der Beweisführung verloren gehen. Zu diesem Zweck untersuchen wir, in welchen Fällen der Sandwich-Satz von konstruktiver Natur ist. Als Ergebnis dieses Kapitels erhalten wir einen Algorithmus, der im Falle eines Kegels mit endlicher Basis sicherlich terminiert und überall dort anwendbar ist, wo die Problemstellung mit Hilfe von „Sandwich-Argumenten" auf konvexen Kegeln modelliert werden kann.

In der gesamten Arbeit werden Kapitel, Abschnitte, Sätze, Lemmata, Gleichungen etc. fortlaufend durchnumeriert. Ein Verweis auf (3.17) ist eine Referenz auf die Gleichung mit der Nummer (3.17) in Kapitel 3. Die Angabe Lemma 3.1.1 verweist auf das erste Lemma im Abschnitt 3.1.

Zur gewählten Notation ist zu bemerken, daß wir gegenüber den in der Literatur üblichen Bezeichnungen an einigen Stellen zugunsten der Methodik, welche im wesentlichen aus Argumenten der Theorie konvexer Kegel besteht, Anpassungen vorgenommen haben. So haben wir als Fluß solche Abbildungen bezeichnet, die in der Literatur häufig Präflüsse genannt werden. Dies erscheint aber gerechtfertigt, da der konstruktive Übergang vom Präfluß zum Fluß nur Standardargumente erfordert. Flüsse, die außerhalb von Quelle und Senke Erhaltungsbedingungen genügen, nennen wir konservative Flüsse. Darüber hinaus möge der Leser beachten, daß der Begriff des blockierenden Flusses leicht modifiziert wurde.

An dieser Stelle möchte ich mich recht herzlich bei Herrn Prof. Dr. B. Fuchssteiner bedanken, der durch seine jederzeitige Bereitschaft zum Dialog immer wieder neue Ideen und Impulse einbrachte.

Kapitel 2

Bekannte Ergebnisse

In diesem einführenden Kapitel stellen wir die für die Arbeit wesentlichen bekannten Ergebnisse der endlichen Netzwerkflußtheorie und der Netzwerk-Desintegrationstheorie vor. Während wir in Abschnitt 2.1 wichtige Ergebnisse der klassischen, endlichen Netzwerkflußtheorie vorstellen, fassen wir in Abschnitt 2.2 die Resultate der Netzwerk-Desintegrationstheorie für unendliche Netzwerke zusammen. Diese auf Fuchssteiner zurückgehenden Ergebnisse werden hier in ihrer Methodik etwas eingehender geschildert, da sie weitgehend unbekannt sind, und da ihr Verständnis für das weitere Vorgehen unerläßlich ist. Zum besseren Vergleich der Netzwerk-Desintegrationstheorie und der klassischen kombinatorischen Theorie für endliche Netzwerke wählen wir auch für endliche Netzwerke eine maßtheoretische Beschreibung.

2.1 Endliche Netzwerke und Flüsse

Grundlegende Begriffe und Kenntnisse aus der Graphentheorie setzen wir als bekannt voraus. Sie können in zahlreichen Lehrbüchern über dieses Gebiet nachgeschlagen werden (z.B. [14, 37, 43]). In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich endliche Netzwerke. Alle Maße in diesem Abschnitt sind endliche, diskrete Maße. Im folgenden verwenden wir zur Abkürzung die Sprechweise „ein Maß m auf einer Menge Ω“ anstelle der formal korrekten Bezeichnung „ein Maß m auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ in einer Menge Ω“. Dies ist jedoch unproblematisch, da wir bei endlichen Mengen grundsätzlich die Potenzmenge als σ-Algebra betrachten.

Bei einem Maß m auf einer endlichen Menge Ω schreiben wir vereinfachend häufig $m(i) := m(\{i\})$ für das Maß eines Singletons $i \in \Omega$. Für Maße ν auf $\Omega \times \Omega$ wählen wir zur Abkürzung die folgende Schreibweise ($i, k \in \Omega, A, B \subset \Omega$):

$$\nu(i,k) := \nu(\{(i,k)\}), \qquad \nu(A,B) := \sum_{i \in A, k \in B} \nu(i,k),$$

$$\nu(i,B) := \sum_{k \in B} \nu(i,k), \qquad \nu(A,k) := \sum_{i \in A} \nu(i,k).$$

Definition 2.1.1: *Ein* Flußnetzwerk N_F *ist ein 5-Tupel* $N_F = (G, \tau, \sigma, q, s)_F$*. Dabei ist* $G = (\Omega, E)$ *der zugrundeliegende gerichtete Graph mit Knotenmenge* Ω *und Kantenmenge* $E \subseteq \Omega \times \Omega$*;* τ *ein positives Maß auf* $\Omega \times \Omega$*, das die* obere Kapazitätsbeschränkung *der Kanten beschreibt;* $\sigma \leq \tau$ *ein positives Maß, welches die* untere Kapazitätsbeschränkung *der Kanten beschreibt;* $q \in \Omega$ *ist* Quelle, *und* $s \in \Omega$ *ist* Senke.

Der Fall mehrerer Quellen und Senken läßt sich durch Standardtransformationen auf den einfachen Fall mit nur einer Quelle und Senke zurückführen (vgl. [18]). In vielen Fällen ist die untere Kapazitätsbeschränkung $\sigma = 0$. Wir werden dann zur Abkürzung[1)] anstelle von $(G, \tau, 0, q, s)_F$ einfach $(G, \tau, q, s)_F$ schreiben.

Definition 2.1.2: *Ein* Bedarfsnetzwerk N_D *ist ein 5-Tupel* $N_D = (G, \tau, \sigma, \gamma, \mu)_D$*. Dabei ist* $G = (\Omega, E)$ *der zugrundeliegende gerichtete Graph mit Knotenmenge* Ω *und Kantenmenge* $E \subseteq \Omega \times \Omega$*;* τ *ein positives Maß auf* $\Omega \times \Omega$*, das die* obere Kapazitätsbeschränkung *der Kanten beschreibt;* $\sigma \leq \tau$ *ein positives Maß, welches die* untere Kapazitätsbeschränkung *der Kanten beschreibt;* γ *ein Maß, das eine Kantengewichtung definiert (Kosten für den Transport einer Einheit über eine Kante) und* μ *ein signiertes Maß, welches den* Bedarf *der Knoten beschreibt. Ist* $\mu(i) < 0$*, so ist Knoten* i *ein* Produzent*; ist* $\mu(i) > 0$*, so ist Knoten* i *ein* Konsument.

[1)] sofern dies nicht zu Mißverständnissen führen kann

Bemerkung 2.1.1: *Das Kostenmaß γ wird in den meisten Anwendungen positiv gewählt.*

Ist die untere Kapazitätsbeschränkung $\sigma = 0$, so werden wir zur Abkürzung[1)]wieder $(G, \tau, \gamma, \mu)_D$ anstelle von $(G, \tau, 0, \gamma, \mu)_D$ schreiben. Untere Kapazitäten werden im folgenden keine Rolle spielen, da man durch Differenzflüsse das Flußproblem auf Netzwerken mit unteren Kapazitäten auf ein kanonisch assoziiertes Flußproblem auf Netzwerken ohne untere Kapazitäten (bzw. mit unteren Kapazitäten überall gleich 0) zurückführen kann.

Vielfach geht man von Einheitskosten aus, d.h. die Kosten zum Transport sind für alle Kanten gleich einer Konstanten c (oftmals 0 oder 1). Wir schreiben dann einfach $(G, \tau, \sigma, c, \mu)_D$ oder $(G, \tau, c, \mu)_D$.

Bedarfsnetzwerke können in einfacher Weise in Netzwerke mit einer Quelle und einer Senke transformiert werden. Dazu führen wir zwei neue Knoten q und s ein, die wir mit jedem Anbieter bzw. jedem Konsumenten verbinden, d.h. es gibt die neuen Kanten (q, i) mit $\tau(q, i) = -\mu(i)$ für alle $i \in \Omega$ mit $\mu(i) < 0$ und (i, s) mit $\tau(i, s) = \mu(i)$ für alle $i \in \Omega$ mit $\mu(i) > 0$. Allen neuen Kanten ordnen wir die Kosten 0 zu. Wir betrachten dann also ein *Flußnetzwerk mit Kostenmaß*.

Ein Fluß $\nu : E \to \mathbb{R}_+$ kann als Transport eines Gutes in einem Netzwerk interpretiert werden. Für eine Kante (i, j) ist $\nu(i, j)$ die Anzahl der beförderten Einheiten über die Kante (i, j). Sind untere und obere Kapazitätsbeschränkungen σ und τ gegeben, so verlangen wir $\sigma \leq \nu \leq \tau$. Da die Übertragung auf Bedarfsnetzwerke kanonisch verläuft, definieren wir Flüsse in der endlichen Situation nur im Fall von Flußnetzwerken.

Definition 2.1.3: *Es sei $N = (\Omega, E, \tau, \sigma, q, s)_F$ ein Flußnetzwerk. Ein* Fluß *in N von q nach s ist ein positives Maß ν auf E. Der Fluß ν heißt* zulässig, *wenn*

$$\sigma \leq \nu \leq \tau \tag{2.1}$$

gilt. Der Fluß ν heißt konservativ, *wenn*

$$\nu(\Omega, i) = \nu(i, \Omega) \quad \text{für alle } i \in \Omega \backslash \{q, s\}. \tag{2.2}$$

Der Wert *oder die* Stärke *eines Flusses* ν *ist die Größe*

$$\mathcal{V}_F(\nu) := \nu(\Omega, s) - \nu(s, \Omega). \tag{2.3}$$

Ist N *ein Flußnetzwerk mit Kostenmaß* γ*, so definieren wir die* Kosten *des Flusses* ν *wie üblich durch:*

$$TC(\gamma, \nu) := \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in E} \nu(\omega_1, \omega_2)\gamma(\omega_1, \omega_2). \tag{2.4}$$

Ist ein Flußnetzwerk $N = (\Omega, E, \tau, \sigma, q, s)_F$ gegeben, so ist man häufig an Aussagen über und die Konstruktion von maximalen Flüssen, also solche mit maximaler Stärke, interessiert. Liegt ein Bedarfsnetzwerk vor, so ist man an der Existenz von Flüssen interessiert, die den Bedarf der Knoten berücksichtigen. Gibt es solche Flüsse, so ist man an kostenminimalen, bedarfsdeckenden Flüssen interessiert. Die Bestimmung maximaler Flüsse in Flußnetzwerken wird im allgemeinen als *Maxflow-Problem* bezeichnet; die Ermittlung kostenminimaler Flüsse in Bedarfsnetzwerken ist das *MCFP (Minimal Cost Flow Problem).*

Ist $G = (\Omega, E)$ ein gerichteter Graph, so bezeichnen wir im folgenden wie üblich eine Kantenfolge $(e_1, \ldots, e_n)$, $e_i \in E$ für $i = 1, \ldots, n$, als *Weg*, wenn es Knoten $v_0, \ldots, v_n \in \Omega$ gibt mit $e_i = (v_{i-1}, v_i)$. Wir schreiben dann auch $v_0 \stackrel{e_1}{\to} v_1 \stackrel{e_2}{\to} \ldots \stackrel{e_n}{\to} v_n$ oder einfach $(v_0, \ldots, v_n)$, falls es keine parallelen Kanten gibt oder falls es keine Rolle spielt, über welche Kante man vom Knoten v_i zum Knoten v_{i+1} geht. Ein Weg $(v_0, \ldots, v_n)$ heißt *Kreis* (der Länge n), falls $v_0 = v_n$ gilt. Sind die Knoten eines Weges paarweise verschieden, so heißt der Weg auch *einfacher Weg* (und im Falle eines Kreises entsprechend *einfacher Kreis*).

Definition 2.1.4: *Es seien* N *ein Netzwerk und* ν *ein zulässiger Fluß in* N*. Der Fluß* ν *heißt* einfacher Fluß, *wenn die von* ν *durchflossenen Kanten einen einfachen Weg oder einen einfachen Kreis in* N *bilden.*

Bekanntlich kann jeder zulässige, konservative Fluß ν in einem Fluß- oder Bedarfsnetzwerk in eine Summe einfacher Flüsse zerlegt werden (vgl. [8]).

Lemma 2.1.1: *Es seien* $N = (\Omega, E, \tau, \sigma, q, s)_F$ *ein Flußnetzwerk und* ν *ein zulässiger Fluß von* q *nach* s *in* N*. Dann kann* ν *in* $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_k$ *zerlegt werden, wobei* $k \leq |E|$ *und die* ν_i *einfache, zulässige Flüsse sind.*

Bemerkung 2.1.2: *Im Fall mehrerer Quellen und Senken (z.B. in Bedarfsnetzwerken) ist die Zahl der einfachen, zulässigen Flüsse durch $|\Omega| + |E|$ beschränkt. In der obigen Zerlegung tragen nur die einfachen, zulässigen Flüsse entlang einfacher Wege zur Vergrößerung des Flusses ν bei. Das bedeutet, daß ein zulässiger Fluß ν in einem Netzwerk[2] mit $\mathcal{V}_F(\nu) = 0$ gemäß Lemma 2.1.1 in höchstens $|E|$ einfache Kreise zerlegt werden kann. Ein zulässiger, konservativer Fluß kann stets in einfache, konservative Flüsse zerlegt werden.*

Definition 2.1.5: *Es seien $N = (\Omega, E, \tau, q, s)_F$ ein Flußnetzwerk und ν ein zulässiger Fluß in N. Das* Restnetzwerk *$N_\nu = (\Omega, E_\nu, \tau_\nu, q, s)_F$ besteht aus den Knoten von N und besitzt die Kantenmenge $E_\nu = E_1 \cup E_2$, wobei E_1 und E_2 definiert sind durch:*

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{(v,w) \mid (v,w) \in E \text{ und } \nu(v,w) < \tau(v,w)\} \quad \text{und} \\ E_2 &:= \{(w,v) \mid (v,w) \in E \text{ und } \nu(v,w) > 0\}. \end{aligned}$$

Das Kapazitätsmaß $\tau_\nu : E_\nu \to \mathbb{R}$ (Restkapazität) ist definiert durch:

$$\tau_\nu(v,w) := \begin{cases} \tau(v,w) - \nu(v,w), & \text{falls } (v,w) \in E_1 \\ \nu(w,v), & \text{falls } (v,w) \in E_2. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ist N ein Flußnetzwerk mit Kostenmaß γ, so definieren wir das Kostenmaß $\gamma_\nu : E_\nu \to \mathbb{R}$ (Restkosten) des Restnetzwerkes durch:

$$\gamma_\nu(v,w) := \begin{cases} \gamma(v,w), & \text{falls } (v,w) \in E_1 \\ -\gamma(w,v), & \text{falls } (v,w) \in E_2. \end{cases} \tag{2.6}$$

Die Kanten E_ν des Restnetzwerkes sind die bezüglich ν *benutzbaren Kanten*. Die Kanten aus E_1 werden als *Vorwärtskanten* bezeichnet; die Kanten aus E_2 heißen *Rückwärtskanten*. Letztere werden entgegen ihrer ursprünglichen Ausrichtung in das Restnetzwerk aufgenommen.

Definition 2.1.6: *Es seien $N = (\Omega, E, \tau, q, s)_F$ ein Flußnetzwerk und ν ein zulässiger Fluß in N. Ein* erweiternder Weg *oder* zunehmender Weg *in N bezüglich ν ist ein Weg[3] von q nach s im Restnetzwerk N_ν.*

[2] Fluß- oder Bedarfsnetzwerk

[3] Die Kanten aus N_ν werden dabei nur entsprechend ihrer Ausrichtung verwendet.

Definition 2.1.7: *Es seien $N = (\Omega, E, \tau, q, s)_F$ ein Flußnetzwerk und ν ein zulässiger Fluß in N. Der Fluß ν heißt*

(1) blockierend, *wenn für jeden zulässigen Fluß $\tilde{\nu}$ mit $\tilde{\nu} \geq \nu$ stets gilt*

$$\mathcal{V}_F(\tilde{\nu}) \leq \mathcal{V}_F(\nu). \tag{2.7}$$

(2) maximal, *wenn für jeden zulässigen Fluß $\tilde{\nu}$ in N gilt*

$$\mathcal{V}_F(\tilde{\nu}) \leq \mathcal{V}_F(\nu), \tag{2.8}$$

wenn also ν von maximaler Stärke ist.

Bemerkung 2.1.3: *Ganz offensichtlich sind maximale Flüsse blockierend, und ein Fluß ν ist genau dann ein blockierender Fluß, wenn es bezüglich ν keinen erweiternden Weg gibt, der nur über Vorwärtskanten führt.*

Das nachfolgende Lemma charakterisiert einen zulässigen, konservativen Fluß ν als maximalen Fluß mit Hilfe des Restnetzwerkes N_ν.

Lemma 2.1.2 ([18]): *Es seien $N = (\Omega, E, \tau, q, s)_F$ ein Flußnetzwerk und ν ein zulässiger, konservativer Fluß in N. Genau dann ist ν maximal, wenn es bezüglich ν keinen erweiternden Weg gibt.*

Lemma 2.1.2 ist Ausgangspunkt zahlreicher Algorithmen zur Bestimmung maximaler Flüsse (z.B. [12, 17, 31, 32, 40, 44, 47, 49]). Ausgehend von einem initialen zulässigen, konservativen Fluß werden erweiternde Wege bestimmt, und der bisherige Fluß wird entlang des gefundenen erweiternden Weges vergrößert.

Definition 2.1.8: *Es sei $N = (\Omega, E, \tau, \sigma, q, s)_F$ ein Flußnetzwerk. Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ der Knotenmenge Ω heißt ein* Schnitt[4)] *(oder ein q und s trennender Schnitt), falls $q \notin A$ und $s \in A$ gilt. Der* Wert *oder die* Kapazität *des Schnittes A ist definiert durch*[5)]*:*

$$\mathcal{V}_C(A) := \tau(\mathcal{C}A \times A) - \sigma(A \times \mathcal{C}A). \tag{2.9}$$

[4)] Vielfach wird auch das Tupel $(\mathcal{C}A, A)$ als Schnitt bezeichnet.

[5)] Dabei bezeichnet $\mathcal{C}A$ das Komplement der Menge A in Ω.

Ganz offensichtlich gilt für jeden Schnitt A, daß jeder Weg von q nach s in dem Netzwerk über wenigstens eine Kante aus $\mathcal{C}A \times A$ führt. Bekannte Ergebnisse sind:

Lemma 2.1.3: *Es seien $N = (\Omega, E, \tau, \sigma, q, s)_F$ ein Flußnetzwerk, $A \subseteq \Omega$ ein beliebiger Schnitt und ν ein zulässiger, konservativer Fluß in N. Dann gilt die Identität*

$$\nu(q,\Omega) - \nu(\Omega, q) = \nu(\mathcal{C}A \times A) - \nu(A \times \mathcal{C}A) = \nu(\Omega, s) - \nu(s, \Omega). \tag{2.10}$$

Für einen beliebigen Schnitt $A \subseteq \Omega$ und einen zulässigen, konservativen Fluß ν gilt

$$\mathcal{V}_F(\nu) \leq \mathcal{V}_C(A). \tag{2.11}$$

Satz 2.1.1 (MaxFlow - MinCut, [17]): *Die minimale Kapazität der Schnitte ist gleich der maximalen Stärke der zulässigen, konservativen Flüsse.*

Das MaxFlow-MinCut-Theorem ist eine Folgerung des starken Dualitätssatzes der linearen Optimierung (vgl. [30]) angewandt auf das Maxflow-Problem.

Eine wichtige Aussage über die Existenz von Flüssen in Bedarfsnetzwerken ist der Satz von GALE, der formal eine Erweiterung von Satz 2.1.1 ist.

Satz 2.1.2 (Satz von Gale, [28]): *Es sei $N_D = (\Omega, E, \tau, 0, \gamma, \mu)_D$ ein Bedarfsnetzwerk. Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) Für alle $A \subseteq \Omega$ ist $\mu(A) \leq \tau(\mathcal{C}A \times A)$.

(2) Es gibt ein Maß ν auf $\Omega \times \Omega$ mit $0 \leq \nu \leq \tau$ und mit $\mu(A) \leq \nu(\Omega \times A) - \nu(A \times \Omega)$ für alle $A \subseteq \Omega$.

Wichtige Ergebnisse bezüglich der Bestimmung kostenminimaler Flüsse in Bedarfsnetzwerken sind die folgenden Aussagen.

Lemma 2.1.4 ([8]): *Ein zulässiger Fluß ν ist genau dann kostenminimal, wenn das zugehörige Restnetzwerk N_ν keine Kreise negativer Kosten enthält.*

Lemma 2.1.4 ist ein Optimalitätskriterium, d.h. mit Hilfe dieses Kriteriums ist entscheidbar, ob ein gegebener Fluß optimal ist oder nicht. Das nachfolgende Lemma ermöglicht es, aus einem gegebenen kostenminimalen Fluß einen kostenminimalen Fluß größerer Stärke zu konstruieren.

Lemma 2.1.5 ([7],[36]): *Es sei ν_1 ein kostenminimaler, zulässiger Fluß mit der Stärke $\mathcal{V}_F(\nu_1)$. Sei ν_2 ein kostenminimaler, zulässiger Fluß der Stärke $\mathcal{V}_F(\nu_2)$ entlang eines erweiternden Weges W im Restnetzwerk N_{ν_1}, dann ist $\nu_1 + \nu_2$ ein kostenminimaler, zulässiger Fluß der Stärke $\mathcal{V}_F(\nu_1) + \mathcal{V}_F(\nu_2)$.*

Obige Lemmata bilden die Grundlage zweier unterschiedlicher algorithmischer Ansätze zur Lösung des MCFP

- Cycle-Canceling-Algorithmus [41], Minimum-Mean-Cycle-Algorithmus [33]
- Sequential-Shortest-Path-Algorithmus [7, 35, 36].

Die Bestimmung kostenminimaler Flüsse ist ebenso wie das Maxflow-Problem ein lineares Optimierungsproblem. Folglich können auch hier kostenminimale, zulässige, konservative Flüsse durch Anwendung des starken Dualitätssatzes charakterisiert werden.

Satz 2.1.3: *Es sei $N_D = (\Omega, E, \tau, \gamma, \mu)_D$ ein Bedarfsnetzwerk. Besitzt das MCFP eine Lösung, so gilt die Identität*

$$\begin{aligned} &\min\{\sum_{(i,j)\in E} \gamma(i,j)\nu(i,j) \mid \nu \text{ zulässiger, konservativer Fluß}\} \qquad (2.12) \\ = \;& \max\{\sum_{i\in\Omega} \mu(i)\pi(i) - \sum_{(i,j)\in E} \tau(i,j)\max(0, \pi(j) - \pi(i) - \gamma(i,j)) \mid \pi \in \mathbb{R}^\Omega\}. \end{aligned}$$

Verallgemeinerungen dieses Satzes werden wir sowohl für dem Fall von unendlichen L^1-L^∞-Netzwerken kennenlernen, wie für den vollständig abstrakten Fall einer Vektorverbandssituation.

2.2 Netzwerk-Desintegrationstheorie

Im folgenden geben wir eine kurze Zusammenfassung der bekannten Ergebnisse für unendliche Netzwerke. Diese Ergebnisse wurden im Rahmen einer Erweiterung der Desintegrationstheorie für Produktmaße in einer Reihe von Originalarbeiten niedergelegt. Eine zusammenfassende Darstellung befindet sich in [24]. Die von uns verwendeten Bezeichnungen folgen dieser Quelle.

Satz 2.2.1 (Abstraktes Fluß-Theorem, [21]): *Es sei Ω eine Menge ausgestattet mit einer σ-Algebra Σ_Ω; weiterhin sei $\Omega \times \Omega$ mit einer σ-Algebra $\Sigma_{\Omega\times\Omega}$ so ausgestattet, daß $A \times \Omega, \Omega \times A \in \Sigma_{\Omega\times\Omega}$ wenn $A \in \Sigma_\Omega$. Gegeben sei $\tau : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ ein endliches, positives Maß und $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ ein signiertes Maß auf Ω. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) Für alle $A \in \Sigma_\Omega$ gilt: $\mu(A) \le \tau(\mathcal{C}A \times A)$.

(2) Es gibt ein Maß ν auf $\Sigma_{\Omega\times\Omega}$ mit:

(2.1) $\mu(A) \le \nu(\Omega \times A) \quad \forall A \in \Sigma_\Omega$,

(2.2) $\nu(A \times B) \le \tau((A \cap \mathcal{C}B) \times B) \quad \forall A, B \in \Sigma_\Omega$,

(2.3) $\nu(A \times B) \ge 0$, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Wenden wir das abstrakte Fluß-Theorem auf endliche, diskrete Mengen Ω an, so erhalten wir als Konsequenz den Satz 2.1.2 (Satz von GALE). Eine leichte Reformulierung der betrachteten Situation ergibt dementsprechend einen Satz, der das Problem für Netzwerke mit unteren und oberen Kapazitäten löst.

Ebenso wie der Satz von GALE, kann auch der MaxFlow-MinCut-Satz für unendliche Knotenmengen verallgemeinert werden:

Satz 2.2.2 (MaxFlow-MinCut-Theorem, [45]): *Es sei $N = (\Omega, E, \tau, \sigma, q, s)_F$ ein nicht notwendigerweise endliches Flußnetzwerk. Es gibt genau dann einen Fluß in N, wenn die Bedingung*

$$\sigma(\mathcal{C}A \times A) \le \tau(A \times \mathcal{C}A) \quad \forall A \subset \Omega \text{ mit } A \subset \Omega \setminus \{q, s\} \vee \mathcal{C}A \subset \Omega \setminus \{q, s\} \tag{2.13}$$

erfüllt ist. Es gilt dann

$$\max\{\mathcal{V}_F(\nu) \mid \nu \text{ *Fluß*}\} = \inf\{\mathcal{V}_C(A) \mid A \text{ *Schnitt*}\}. \tag{2.14}$$

Wichtige Hilfsmittel zum Beweis der Sätze 2.2.1 und 2.2.2 sind der nachfolgende Desintegrationssatz ([21]) und das Sandwich-Theorem 2.2.4 ([20]). Beide Sätze benötigen wir für die Erweiterung der Netzwerk-Desintegrationstheorie.

Wir betrachten $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mit den üblichen Erweiterungen der algebraischen Operationen. Außerdem betrachten wir einen Kegel $\mathcal{F}$ mit verträglicher Präordnung $\prec$ (alle betrachteten Kegel setzen wir als konvex voraus, und *Verträglichkeit* bedeutet, daß Ungleichungen in der üblichen Weise behandelt werden können). Wie gewöhnlich nennen wir ein Funktional $\pi : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ *monoton*, falls aus $f_1 \prec f_2$ die Gültigkeit von $\pi(f_1) \leq \pi(f_2)$ folgt. Ein Funktional heißt *homogen*, falls $\pi(\lambda f) = \lambda\pi(f)$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$ gilt. Ein Funktional π heißt *sublinear*, falls es homogen und *subadditiv* ist, d.h. $\pi(f_1 + f_2) \leq \pi(f_1) + \pi(f_2)$ für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Gilt für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ stattdessen $\pi(f_1 + f_2) \geq \pi(f_1) + \pi(f_2)$, so heißt π *superadditiv*; falls es zusätzlich homogen ist, so heißt es *superlinear*. Ein Funktional heißt *linear*, falls es zugleich sub- und superlinear ist.

Für einen Teilkegel $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ und für superlineares oder lineares μ auf $\mathcal{G}$ sowie monotones und sublineares π auf $\mathcal{F}$ definieren wir

$$\mathrm{Lin}_{G<F}(\mu, \pi) := \{\nu \mid \nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}} \text{ monoton, linear mit } \mu \leq \nu \text{ auf } \mathcal{G} \;\wedge\; \nu \leq \pi \text{ auf } \mathcal{F}\}.$$

Im folgenden sei (Ω, Σ, m) ein Maßraum mit σ-Algebra Σ und σ-endlichem Maß m. Mit $L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(m)$ bezeichnen wir den konvexen Kegel der $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen, meßbaren Funktionen auf Ω, so daß ihr positiver Teil bezüglich m integrierbar ist, also $\int_\Omega f^+ dm < \infty$, wobei $f^+ := \max(f, 0)$ den positiven Teil bezeichnet.

Im Rahmen der Desintegrationstheorie interessiert man sich für die Existenz von Operatoren $P : \mathcal{F} \to L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(m)$. Ein solcher Operator heißt — in Verallgemeinerung der Begriffe für Funktionale — *sublinear*, falls er positiv, homogen und subadditiv ist. Ist er positiv, homogen und superadditiv, so heißt er *superlinear*. Ist der Operator sowohl sub- als auch superlinear, so wird er als *linear* bezeichnet.

Auf $\mathcal{F}$ führen wir eine Kollektion von Ordnungsstrukturen $\{\prec_\omega \mid \omega \in \Omega\}$ ein, wobei wir für jedes $\prec_\omega$ die Verträglichkeit mit den Kegeloperationen verlangen. Ein Operator $P : \mathcal{F} \to L^1_{\overline{\mathbb{R}}}(m)$ heißt *monoton* bezüglich dieser lokalen Ordnungsstruktur (oder einfach Ω-*monoton*), falls für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ gilt

$$P(f_1) \leq P(f_2) \; m\text{-fast-überall auf } \{\omega \in \Omega \mid f_1 \prec_\omega f_2\}.$$

Satz 2.2.3 (Desintegrationssatz, [21]): *Sei $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ linear und sei $P : \mathcal{F} \to L^1_{\mathbb{R}}(m)$ ein Ω-monotoner, sublinearer Operator mit*

$$\mu(f) \leq \int_\Omega P(f)dm \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}. \tag{2.15}$$

Dann gibt es einen Ω-monotonen, linearen Operator $T : \mathcal{F} \to L^1_{\mathbb{R}}(m)$ mit $T \leq P$, so daß

$$\mu(f) \leq \int_\Omega T(f)dm \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}. \tag{2.16}$$

Zentrales Hilfsmittel beim Beweis sowohl dieses Desintegrationssatzes wie auch des abstrakten Fluß-Theorems ist das Sandwich-Theorem für prägeordnete Kegel.

Satz 2.2.4 (Sandwich-Theorem, [20]): *Sei $\pi : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein monotones, sublineares Funktional und sei $\omega : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein superlineares Funktional mit $\omega \leq \pi$. Dann gibt es ein monotones, lineares Funktional $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\omega \leq \mu \leq \pi$.*

Als Konsequenz aus dem Sandwich-Satz erhalten wir den folgenden dominierten Fortsetzungssatz:

Satz 2.2.5 (Fortsetzungssatz, vgl. [24] für einen Spezialfall):

(1) Es sei G Teilkegel des prägeordneten Kegels $(F, \prec)$, und es sei ω ein lineares Funktional auf G und π ein monotones, sublineares Funktional auf F mit $\omega(g) \leq \pi(g)$ für jedes $g \in G$. Dann gibt es ein monotones, lineares Funktional μ auf F mit $\omega \leq \mu$ auf G und $\mu \leq \pi$ auf F.

(2) Für ein beliebiges aber fixiertes $f \in \mathcal{F}$ kann μ so gewählt werden, daß $\mu(f)$ minimal ist.

Die Existenz einer Fortsetzung, also Teil (1) des Satzes, ist in [24], Satz 1.3.1, gezeigt. Im Vektorraumfall folgt die im Satz behauptete Minimalität häufig durch Kompaktheitsargumente (z.B. mit dem Satz von BANACH-ALAOGLU). Da wir in dem betrachteten allgemeineren Fall keine Referenz für die Minimalität angeben können, sei hier eine Beweisskizze gegeben:

Beweis

Es $f \in \mathcal{F}$ beliebig jedoch fest gewählt. Wir definieren

$$\alpha := \sup\{\omega(g) - \pi(h) \mid g \prec h + f, g \in \mathcal{G}, h \in \mathcal{F}, \pi(h) \neq -\infty\} \tag{2.17}$$

und für $h \in \mathcal{F}$

$$\pi^\vee(h) := \inf\{\lambda\alpha + \pi(\tilde{h}) \mid h \prec \lambda f + \tilde{h}, \tilde{h} \in \mathcal{F}, \lambda \geq 0\}. \tag{2.18}$$

Wir bemerken, daß für jedes $\tilde{\mu} \in \mathrm{Lin}_{G<F}(\omega, \pi)$ aus $g \prec h + f$ mit $g \in \mathcal{G}$ und $h \in \mathcal{F}$ wegen

$$\tilde{\mu}(f) + \tilde{\mu}(h) \geq \omega(g) \quad \text{und} \quad \tilde{\mu}(h) \leq \pi(h)$$

die Gültigkeit von

$$\tilde{\mu}(f) \geq \omega(g) - \pi(h)$$

folgt. Deshalb gilt

$$\alpha \leq \tilde{\mu}(f) \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathrm{Lin}_{G<F}(\omega, \pi). \tag{2.19}$$

Wir wollen zeigen, daß es auch ein lineares μ mit $\alpha \geq \mu(f)$ gibt, woraus dann die behauptete Minimalität folgt. Die Subadditivität und die Monotonie von π liefern offensichtlich

$$\alpha \leq \pi(f),$$

denn mit $\pi(h) \neq -\infty$ und $g \prec h + f$ haben wir

$$\omega(g) \leq \pi(g) \leq \pi(h) + \pi(f).$$

Weiterhin gilt für $g \in \mathcal{G}$

$$\omega(g) \leq \pi^\vee(g). \tag{2.20}$$

Dies sieht man folgendermaßen: wird das Infimum in (2.18) für den Fall $\lambda = 0$ angenommen, so folgt (2.20) sofort aus $\omega \leq \pi$. Wird das Infimum für den Fall $\pi(\tilde{h}) = -\infty$ angenommen, dann ist die Behauptung klar. In den verbleibenden Fällen gilt mit der Definition von α

$$\begin{aligned}
\pi^\vee(g) &= \inf\{\lambda\alpha + \pi(\tilde{h}) \mid g \prec \lambda f + \tilde{h}, \lambda > 0, \pi(\tilde{h}) \neq -\infty\} \\
&= \inf\{\lambda(\alpha + \pi(\frac{\tilde{h}}{\lambda})) \mid \frac{g}{\lambda} \prec f + \frac{\tilde{h}}{\lambda}, \lambda > 0, \pi(\frac{\tilde{h}}{\lambda}) \neq -\infty\} \\
&\geq \inf\{\lambda(\omega(\frac{g}{\lambda}) - \pi(\frac{\tilde{h}}{\lambda}) + \pi(\frac{\tilde{h}}{\lambda})) \mid \frac{g}{\lambda} \prec f + \frac{\tilde{h}}{\lambda}, \lambda > 0, \pi(\frac{\tilde{h}}{\lambda}) \neq -\infty\} \\
&= \omega(g).
\end{aligned}$$

Offenbar gilt auf ganz $\mathcal{F}$

$$\pi^{\vee} \leq \pi, \tag{2.21}$$

denn für $h \in \mathcal{F}$ ist

$$\begin{aligned}
\pi^{\vee}(h) &= \inf\{\lambda\alpha + \pi(\tilde{h}) \mid h \prec \lambda f + \tilde{h}, \lambda \geq 0, \tilde{h} \in \mathcal{F}\} \\
&\leq \inf\{\pi(\tilde{h}) \mid h \prec \tilde{h}, \tilde{h} \in \mathcal{F}\} \\
&= \pi(h).
\end{aligned}$$

Ferner ist $\pi^{\vee}$ monoton und sublinear. Die Monotonie ist eine direkte Konsequenz aus der Definition von $\pi^{\vee}$ bzw. der Transitivität von $\prec$. Für den Nachweis der Subadditivität seien $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\pi^{\vee}(h_1 + h_2) &= \inf\{\lambda\alpha + \pi(\tilde{h}) \mid h_1 + h_2 \prec \lambda f + \tilde{h}, \lambda \geq 0, \tilde{h} \in \mathcal{F}\} \\
&= \inf\{(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha + \pi(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2) \mid h_1 + h_2 \prec (\lambda_1 + \lambda_2) f + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2, \\
&\qquad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \mathcal{F}\} \\
&\leq \inf\{(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha + \pi(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2) \mid h_1 \prec \lambda_1 f + \tilde{h}_1, h_2 \prec \lambda_2 f + \tilde{h}_2, \\
&\qquad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \mathcal{F}\} \\
&\leq \inf\{\lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha + \pi(\tilde{h}_1) + \pi(\tilde{h}_2) \mid h_1 \prec \lambda_1 f + \tilde{h}_1, h_2 \prec \lambda_2 f + \tilde{h}_2, \\
&\qquad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \mathcal{F}\} \\
&= \inf\{\lambda_1\alpha + \pi(\tilde{h}_1) \mid h_1 \prec \lambda_1 f + \tilde{h}_1, \lambda_1 \geq 0, \tilde{h}_1 \in \mathcal{F}\} + \\
&\qquad \inf\{\lambda_2\alpha + \pi(\tilde{h}_2) \mid h_2 \prec \lambda_2 f + \tilde{h}_2, \lambda_2 \geq 0, \tilde{h}_2 \in \mathcal{F}\} \\
&= \pi^{\vee}(h_1) + \pi^{\vee}(h_2).
\end{aligned}$$

Wegen $\pi^{\vee} \geq \omega$ können wir nun Teil (1) anwenden und erhalten ein monotones, lineares μ auf $\mathcal{F}$ mit $\omega \leq \mu$ auf $\mathcal{G}$ und $\mu \leq \pi^{\vee}$ auf $\mathcal{F}$. Wegen (2.21) ist dieses μ natürlich auch ein Element aus $\mathrm{Lin}_{G<F}(\omega, \pi)$. Da offensichtlich $\pi^{\vee}(f) = \alpha$, haben wir ein $\mu \in \mathrm{Lin}_{G<F}(\omega, \pi)$ mit $\mu(f) \leq \alpha$ gefunden, also wegen (2.19) $\mu(f) = \alpha$. ■

Bemerkung 2.2.1: *An dieser Stelle wollen wir bemerken, daß die Aussage des Fortsetzungssatzes 2.2.5 weiterhin gültig bleibt, wenn wir anstelle der Linearität von ω nur die Superlinearität voraussetzen.*

Ist G Unterraum eines Vektorraumes F, so impliziert Satz 2.2.5 den Fortsetzungssatz von Hahn-Banach.

Kapitel 3

Erweiterung der Netzwerk-Desintegrationstheorie

In diesem Kapitel stellen wir eine Erweiterung der Netzwerk-Desintegrationstheorie vor. Da sowohl das abstrakte Fluß-Theorem 2.2.1 wie auch der Desintegrationssatz 2.2.3 Konsequenzen des grundlegenden Sandwich-Satzes sind, soll versucht werden, einen Beweis des abstrakten Fluß-Theorems zu finden, der auf formale Desintegrationsmethoden verzichtet und den etwas unnatürlichen Rückgriff auf Satz 2.2.3 vermeidet. Der Versuch einen solchen einfacheren Beweis zu finden hat nicht nur ästhetische Motivation, sondern soll auch zu einer transparenteren Verwendung der funktionalanalytischen Grundlagen führen. Des weiteren wollen wir das abstrakte Fluß-Theorem auch auf die Situation kostenminimaler Flüsse ausdehnen. Einerseits handelt es sich dabei um eine wichtige Problemstellung, und andererseits führen die Ergebnisse für kostenminimale Flüsse zu konstruktiven Beurteilungskriterien für die Maximalität von Flüssen.

Die wesentliche Idee, die man für den im folgenden bewiesenen Satz über kostenminimale Flüsse benötigt, besteht darin, daß man das Kriterium für die Kostenoptimalität eines Flusses auf eine Supremumsaussage über die Kollektion aller möglichen Preissysteme zurückführt. Der größeren Transparenz wegen verallgemeinern wir zuerst auf die noch recht konkrete L^1-L^∞-Situation und gehen danach erst zur vollständig abstrakten Vektorverbandssituation über.

3.1 Kostenminimale Flüsse in unendlichen Netzwerken

Wir beginnen mit einer Diskussion der grundlegenden Fragestellung, die zunächst an der Situation endlicher Netzwerke erläutert wird und damit den Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung auf unendliche Netzwerke liefert. Wie bereits gesagt, ist die Bestimmung kostenminimaler Flüsse in Bedarfsnetzwerken (MCFP – Minimal Cost Flow Problem) eines der klassischen Probleme der Netzwerkflußtheorie. Dabei ist der kostengünstigste Transport eines Gutes durch ein Netzwerk zu bestimmen, der den Bedarf in bestimmten Knoten durch das vorhandene Angebot in anderen Knoten deckt.

Zur Präzisierung der Fragestellung sei Ω **einstweilen** eine endliche Menge von Konsumenten, wobei der Bedarf von Konsument $i \in \Omega$ mit μ_i bezeichnet ist, und Angebot als negativer Bedarf behandelt wird. Die Konsumenten sind durch Leitungen $\mathcal{E} \subseteq \Omega \times \Omega$ verbunden (d.h. Kanten im zugrundeliegenden Graphen). Dabei ist $\tau_{k,i}$ die Kapazität der Kante zwischen den Knoten k und i, und $\gamma_{k,i}$ ist eine Kantengewichtung, welche die Kosten je transportierter Einheit von k nach i vorgibt. Ein *zulässiger Fluß* ist eine Abbildung $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$0 \leq \nu_{k,i} \leq \tau_{k,i} \quad \forall i, k \in \Omega.$$

Ein zulässiger Fluß heißt *bedarfsdeckend*, wenn

$$\mu_i \leq \sum_{k \in \Omega} (\nu_{k,i} - \nu_{i,k}) \quad \forall i \in \Omega.$$

Das MCFP besteht aus dem Finden eines zulässigen und bedarfsdeckenden Flusses ν mit minimalen Kosten $TC(\gamma, \nu)$

$$\min_{\nu \text{ zulässig, bedarfsdeckend}} \quad TC(\gamma, \nu) := \sum_{(k,i) \in \mathcal{E}} \nu_{k,i} \gamma_{k,i}.$$

Bei linearen Optimierungsaufgaben spielt das *Dualitätsprinzip*, welches auf J. VON NEUMANN zurückgeht (siehe [10], Seite 123, oder [29], Seite 12), eine fundamentale Rolle. Der starke Dualitätssatz[1)] besagt:

[1)]Siehe [30] für den ersten Beweis.

Wenn Lösungen der primalen und der dualen Aufgabe existieren, so gilt: der einer Lösung des primalen Problems zugeordnete Wert z der primalen Zielfunktion ist größer oder gleich dem einer Lösung des dualen Problems zugeordnete Wert w der dualen Zielfunktion. Besitzt die primale Aufgabe eine zulässige Lösung, so besitzt auch die duale Aufgabe eine zulässige Lösung und es gilt $\min z = \max w$.

Die zum MCFP duale Problemstellung ist die Maximierung von

$$w(\pi) = \sum_{i \in \Omega} \mu_i \pi_i - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \tau_{i,j} \max(0, \pi_j - \pi_i - \gamma_{i,j}),$$

wobei die π_i die dualen Variablen sind. Durch Anwendung des starken Dualitätssatzes erhalten wir: gibt es einen zulässigen Fluß, so folgt

$$\min_{\nu} TC(\gamma, \nu) = \max_{\pi} w(\pi).$$

Das duale Problem besitzt eine interessante ökonomische Interpretation:

Bemerkung 3.1.1: *Betrachten wir die dualen Variablen als Preise, d.h. π_i ist der Preis des Gutes beim Konsumenten i, dann besagt die min-max-Bedingung: Ist ein geeignetes Preissystem gefunden, so erhalten wir den kostenminimalen Fluß dadurch, daß in jedem Knoten die am profitabelsten erscheinende Aktion ausgeführt wird. Ist also die Preisdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt einer Kante größer als die Transportkosten über diese Kante, dann muß der Fluß mit voller Kapazität fließen. Überschreiten hingegen die Transportkosten die Preisdifferenz, so fließt kein Fluß über die Kante. Bei denjenigen Kanten, bei denen Transportkosten und Preisdifferenz identisch sind, muß der Fluß entsprechend dem Angebot bzw. der Nachfrage gewählt werden.*

Diese Interpretation ist auch vom algorithmischen Gesichtspunkt her interessant. In der Literatur sind zahlreiche Algorithmen zur Lösung des MCFP zu finden, die auf der Verbesserung der dualen Kosten basieren (*Dual-Cost-Improvement-Algorithmen*) (siehe auch Abschnitt 3.3.1). Beispielsweise der Primal-Duale-Algorithmus [18], der Sequential-Shortest-Path-Algorithmus [7, 35, 36], die Out-of-Kilter-Methode [27] und die Relaxations-Methode ([2] oder [3]). Obwohl es Algorithmen mit einer überlegenen theoretischen Komplexität gibt, gehören die Relaxations-Algorithmen zu den schnellsten Verfahren in der Praxis (siehe [4], [5] oder [34]).

Wir wollen nun die Situation auf eine unendliche Menge von Konsumenten verallgemeinern. Für das unendliche System ersetzen wir die Größen μ, τ, γ und ν durch geeignete Maße und Funktionen auf $\Omega \times \Omega$ beziehungsweise Ω. Außerdem werden alle lokalen Argumente ersetzt durch fast-überall Bedingungen.

Es sei (Ω, Σ) ein Meßraum mit einer geeigneten σ-Algebra Σ auf der Menge Ω der Konsumenten. Die Menge $\Omega \times \Omega$ wird mit der entsprechenden Produkt-σ-Algebra $\Sigma \otimes \Sigma$ ausgestattet. Für endliches Ω erhalten wir die vorhergehende Situation, indem wir $\tau_{k,i}$ und μ_i als die Anwendung der Maße τ, μ auf die entsprechenden Singletons betrachten, d.h. $\tau(\{(k,i)\})$ beziehungsweise $\mu(\{i\})$. Die im folgenden vorkommenden Teilmengen von Ω und $\Omega \times \Omega$ werden grundsätzlich als meßbar vorausgesetzt, als σ-Algebren werden Σ und $\Sigma \otimes \Sigma$ betrachtet.

Gegeben sei ein signiertes Maß

$$\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \quad \text{(Bedarf)},$$

ein σ-endliches, positives Maß

$$\tau : \Sigma \otimes \Sigma \to \mathbb{R}_+ \quad \text{(Kapazität)}$$

und eine bezüglich τ absolut-integrable Funktion

$$\gamma : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{(Kosten)}$$

mit $\gamma(\omega, \omega) = 0$ für fast-alle $\omega \in \Omega$. Eine $L^\infty(\tau)$-Funktion $\nu : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\nu \leq 1 \tag{3.1}$$

und

$$\int_{A \times B} \nu d\tau \geq 0 \quad \text{für } A \cap B = \emptyset \tag{3.2}$$

heißt *zulässiger Fluß* (oder genauer *τ-zulässiger Fluß*). Wenn diese Funktion bei Berücksichtigung des Angebotes die Nachfrage befriedigt, d.h. wenn für alle $A \in \Sigma$ gilt

$$\mu(A) \leq \int_{(\Omega \setminus A) \times A} \nu d\tau - \int_{A \times (\Omega \setminus A)} \nu d\tau, \tag{3.3}$$

so heißt ν *bedarfsdeckend*. Das bedeutet, daß die Differenz des Flusses von $\Omega \setminus A$ nach A (Eingangsfluß der Konsumentenkoalition A) minus dem Fluß von A nach $\Omega \setminus A$ (Ausgangsfluß von A) den Verbrauch übersteigen muß. Wegen $\nu \leq 1$ ist die übliche Kapazitätsschranke

$$\hat{\nu}(A \times B) := \int_{A \times B} \nu d\tau \leq \tau(A \times B)$$

offenbar automatisch erfüllt. Die Kosten eines Flusses ν sind definiert durch

$$\Gamma(\gamma, \nu) := \int_{\Omega \times \Omega} \nu \gamma d\tau. \tag{3.4}$$

Das allgemeine MCFP besteht dann aus dem Finden eines zulässigen und bedarfsdeckenden Flusses mit minimalen Kosten. Die bekannte Theorie liefert uns, daß es einen zulässigen, bedarfsdeckenden Fluß genau dann gibt, wenn

$$\mu(A) \leq \tau((\Omega \setminus A) \times A) \quad \text{für alle } A \in \Sigma$$

gilt (siehe Satz 2.2.1 oder [24], Seite 57). Wir beweisen dieses Ergebnis im folgenden simultan mit dem weitergehenden Ergebnis über die Kostenminimalität.

Zur Lösung des Problemes der Suche nach einem kostenminimalen Fluß führen wir nichtnegative, meßbare Funktionen $f \geq 0$ auf Ω ein, die wir als *lokale Preissysteme* bezeichnen. Dabei bezeichnet $f(\omega)$ den Preis des Gutes für den Konsumenten $\omega \in \Omega$. Von diesen Funktionen f setzen wir voraus, daß f absolut-integrabel bezüglich sowohl τ_1 und τ_2 ist, wobei τ_1 und τ_2 die Marginalmaße von τ auf Ω sind, also

$$\tau_1(A) := \tau(A \times \Omega) \quad \forall A \in \Sigma, \tag{3.5}$$

$$\tau_2(A) := \tau(\Omega \times A) \quad \forall A \in \Sigma. \tag{3.6}$$

Die *Verbrauchskosten* unter dem Preissystem f sind dann

$$C(f) = \int_{\Omega} f d\mu. \tag{3.7}$$

Die μ-Integrabilität von f ist garantiert, wenn $\mu \leq \tau_2$ (eine Bedingung die später immer erfüllt sein wird). Wir definieren

$$\hat{\rho}_f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$$

durch

$$\hat{\rho}_f(\omega_1, \omega_2) = \max(0, f(\omega_2) - f(\omega_1) - \gamma(\omega_1, \omega_2)), \tag{3.8}$$

und bezeichnen

$$\rho(f, \gamma) := \int_{\Omega \times \Omega} \hat{\rho}_f d\tau \tag{3.9}$$

als den *optimalen Transportprofit* unter dem gegebenen Preissystem f bezüglich der Kostenfunktion γ. Dies ist der Profit, der durch den Transport des Gutes (bei voller oder leerer Kapazität) von ω_1 nach ω_2 erzielt werden kann.

Lemma 3.1.1: *Für jedes Preissystem f und jeden zulässigen, bedarfsdeckenden Fluß ν sind die Transportkosten größer oder gleich der Differenz zwischen Verbrauchskosten und optimalem Transportprofit, d.h.*

$$\Gamma(\gamma, \nu) \geq C(f) - \rho(f, \gamma). \tag{3.10}$$

Beweis

Man beachte, daß aus (3.3) folgt

$$\mu(A) \leq \int_{\Omega \times A} \nu d\tau - \int_{A \times \Omega} \nu d\tau \tag{3.11}$$

für alle meßbaren Teilmengen A von Ω. Das Maß μ ist also kleiner oder gleich der Differenz der Marginalmaße des durch die Dichte ν und das Maß τ gegebenen Maßes $\hat{\nu}$ auf $\Omega \times \Omega$. Daraus folgt

$$\int_\Omega f d\mu \leq \int_{\Omega \times \Omega} \nu(\omega_1, \omega_2)(f(\omega_2) - f(\omega_1)) d\tau(\omega_1, \omega_2). \tag{3.12}$$

Hieraus schließen wir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f d\mu - \Gamma(\gamma, \nu) &\leq \int_{\Omega \times \Omega} \nu(\omega_1, \omega_2)(f(\omega_2) - f(\omega_1) - \gamma(\omega_1, \omega_2)) d\tau(\omega_1, \omega_2) && (3.13)\\
&\leq \int_{\Omega \times \Omega} \nu \hat{\rho}_f d\tau && (3.14)\\
&\leq \int_{\Omega \times \Omega} \hat{\rho}_f d\tau && (3.15)\\
&= \rho(f, \gamma)
\end{aligned}$$

was die Behauptung ergibt. Beim Übergang von (3.13) nach (3.14) haben wir benutzt, daß $f(\omega_2) - f(\omega_1) - \gamma(\omega_1, \omega_2)$ und $\hat{\rho}_f(\omega_1, \omega_2)$ sich auf der Diagonalen

$$D = \{(\omega, \omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

von $\Omega \times \Omega$ nicht unterscheiden, und ν nach (3.2) außerhalb der Diagonalen nichtnegativ ist. Beim Übergang von (3.14) nach (3.15) wurde $\nu \leq 1$ verwendet. ■

Da der aktuelle Fluß nicht in die Definition des optimalen Transportprofits eingeht, ist nicht ersichtlich, ob der optimale Transportprofit mittels zulässiger, bedarfsdeckender Flüsse realisiert werden kann. Dieser optimale Profit kann nur dann erreicht werden, wenn es einen zulässigen, bedarfsdeckenden Fluß gibt, der immer dann die volle Kapazität annimmt, wenn der Transport bei Beachtung der Preisdifferenz bezüglich der lokalen Preissysteme Profit verspricht. Der folgende Satz zeigt die Existenz eines kostenminimalen Flusses und charakterisiert einen solchen mittels lokaler Preissysteme.

Satz 3.1.1 (Satz über L^∞-kostenminimale Flüsse bei L^1-Kosten):

(1) Es gibt genau dann einen zulässigen, bedarfsdeckenden Fluß, wenn

$$\mu(A) \leq \tau((\Omega \setminus A) \times A) \tag{3.16}$$

für alle $A \in \Sigma$ gilt.

(2) Gibt es einen zulässigen, bedarfsdeckenden Fluß, dann gibt es auch einen zulässigen, bedarfsdeckenden Fluß ν, so daß die Transportkosten bezüglich γ gleich dem Supremum (über alle lokalen Preissysteme) der Differenz zwischen Verbrauchskosten und optimalem Transportprofit sind, d.h.

$$\Gamma(\gamma, \nu) = \sup\{C(f) - \rho(f, \gamma) \mid f \textit{ lokales Preissystem}\}. \tag{3.17}$$

Notwendigerweise ist ν dann ein kostenminimaler Fluß.

3.1.1 Technische Hilfsmittel

Zur Vorbereitung des komplexen Beweises des Satzes stellen wir einige technische Hilfsmittel bereit.

Es sei G Teilkegel des prägeordneten Kegels F. Für superlineares μ auf G und monotones, sublineares π auf F mit $\mu \leq \pi$ auf G definieren wir für $f \in F$

$$\omega(f) := \sup\{\mu(g) - \pi(h) \mid g \prec f + h, g \in G, h \in F\}.$$

Bemerkung 3.1.2: *Es gilt dann:*

(1) Für alle $f \in F$ ist $\omega(f) \leq \inf\{\nu(f) \mid \nu \in \mathrm{Lin}_{G<F}(\mu, \pi)\}$,

(2) $\mu \leq \omega$ auf G und $\omega \leq \pi$ auf F,

(3) ω ist superlinear.

Beweis

(1) folgt aus der Tatsache, daß für alle $\nu \in \mathrm{Lin}_{G<F}(\mu, \pi)$ und $g \prec f + h$ mit $g \in G$ und $f, h \in F$ gilt

$$\mu(g) \leq \nu(g) \leq \nu(f+h) = \nu(f) + \nu(h) \leq \nu(f) + \pi(h).$$

Die Gültigkeit von $\mu \leq \omega$ ist offensichtlich und $\omega \leq \pi$ ist eine Konsequenz aus (1). Die Superlinearität ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \omega(f_1 + f_2) &= \sup\{\mu(g) - \pi(h) \mid g \prec f_1 + f_2 + h, g \in G, h \in F\} \\ &\geq \sup\{\mu(g_1 + g_2) - \pi(h_1 + h_2) \mid g_1 \prec f_1 + h_1, g_2 \prec f_2 + h_2, g_i \in G, h_i \in F\} \\ &\geq \sup\{\mu(g_1) + \mu(g_2) - \pi(h_1) - \pi(h_2) | g_1 \prec f_1 + h_1, g_2 \prec f_2 + h_2, g_i \in G, h_i \in F\} \\ &= \omega(f_1) + \omega(f_2). \end{aligned}$$

■

Lemma 3.1.2: *Für $f \in F$ mit $\omega(f) \neq -\infty$ gilt*

$$\begin{aligned} \omega(f) &= \sup\{\mu(g) - \pi(h) \mid g \prec f + h, g \in G, h \in F\} \\ &= \inf\{\nu(f) \mid \nu \in \mathrm{Lin}_{G<F}(\mu, \pi)\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Beweis

Eine Richtung der beiden für die Identität notwendigen Ungleichungen haben wir bereits bewiesen. Für die zweite Richtung fixieren wir $f \in F$ mit $\omega(f) \neq -\infty$ und definieren für $h \in F$

$$\rho(h) := \inf\{\lambda\omega(f) + \pi(g) \mid h \prec \lambda f + g, g \in F, \lambda \geq 0\}.$$

Offenbar gilt $\rho \leq \pi$ und ρ ist offensichtlich monoton und sublinear, denn

$$\begin{aligned}
\rho(h_1 + h_2) &= \inf\{\lambda\omega(f) + \pi(g) \mid h_1 + h_2 \prec \lambda f + g\} \\
&\leq \inf\{(\lambda_1 + \lambda_2)\omega(f) + \pi(g_1 + g_2) \mid h_1 \prec \lambda_1 f + g_1, h_2 \prec \lambda_2 f + g_2\} \\
&\leq \inf\{\lambda_1\omega(f) + \pi(g_1) + \lambda_2\omega(f) + \pi(g_2) \mid h_1 \prec \lambda_1 f + g_1, h_2 \prec \lambda_2 f + g_2\} \\
&= \rho(h_1) + \rho(h_2).
\end{aligned}$$

Nach Definition von ω gilt $\lambda\omega(f) + \pi(h) \geq \mu(g)$ für $g \prec \lambda f + h$, $g \in G$, $h \in F$ und $\lambda \geq 0$, und somit $\mu \leq \rho$ auf G. Wir können deshalb den Fortsetzungssatz 2.2.5 unter Berücksichtigung von Bemerkung 2.2.1 anwenden und erhalten ein monotones, lineares Funktional ν mit $\mu \leq \nu$ auf G und mit $\nu \leq \rho$ auf F. Dieses ν ist natürlich auch ein Element aus $\mathrm{Lin}_{G<F}(\mu, \pi)$ und weiterhin gilt $\nu(f) \leq \omega(f)$, denn es ist

$$\nu(f) \leq \rho(f) = \inf\{\lambda\omega(f) + \pi(g) \mid f \prec \lambda f + g, \lambda \geq 0\} = \omega(f).$$

Damit ist auch die andere Richtung gezeigt. ■

3.1.2 Beweis von Satz 3.1.1

Wir setzen die Gültigkeit von (3.16), also $\mu(A) \leq \tau((\Omega \setminus A) \times A)$ für alle $A \in \Sigma$ voraus, da dies nach (3.1) – (3.3) offensichtlich notwendig für die Existenz eines zulässigen, bedarfsdeckenden Flusses ist. Durch diese Bedingung ist sichergestellt, daß μ absolut-stetig bezüglich des Marginalmaßes τ_2 von τ ist, denn dann gilt $\mu \leq \tau_2$.

Es sei $\mathcal{F}$ der Raum aller reellwertigen Funktionen auf Ω, die sowohl bezüglich τ_1 wie τ_2 absolut-integrabel sind. Mit $\mathcal{F}_+$ sei der positive Teilkegel von $\mathcal{F}$ bezeichnet. $\mathcal{F}_+$ kann durch die Elemente der positiven linearen Hülle der charakteristischen Funktionen χ_A, $A \in \Sigma$ mit endlichem Marginalmaß, approximiert werden, also durch die positiven, einfachen, meßbaren und integrablen Funktionen (Elementarfunktionen). Ein Element aus $\mathcal{F}_+$ heißt *lokales Preissystem*.

Für reellwertige Funktionen auf Ω definieren wir eine Kollektion

$$\{\prec_{(\omega_1,\omega_2)} \mid \omega_1, \omega_2 \in \Omega\}$$

von Ordnungsstrukturen durch

$$f \prec_{(\omega_1,\omega_2)} g \iff f(\omega_1) \geq g(\omega_1) \text{ und } f(\omega_2) \leq g(\omega_2),$$

und für $f \in \mathcal{F}$ definieren wir eine Funktion $p_f : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ durch

$$p_f(\omega_1, \omega_2) := \max(0, f(\omega_2) - f(\omega_1)). \tag{3.19}$$

Wie eine einfache Rechnung zeigt, ist die Abbildung $f \mapsto p_f$ sublinear und es gilt

$$f \prec_{(\omega_1,\omega_2)} g \;\Rightarrow\; p_f(\omega_1, \omega_2) \leq p_g(\omega_1, \omega_2). \tag{3.20}$$

Der Übergang von einem Preissystem $f \in \mathcal{F}_+$ zu den Verbrauchskosten $\int_\Omega f d\mu$, also die Abbildung $f \mapsto \int_\Omega f d\mu$, ist ein lineares Funktional auf $\mathcal{F}_+$.

Wir betrachten im folgenden den Kegel

$$\Phi := \{\varphi : \Omega \times \Omega \to \mathcal{F}\}$$

und den Teilkegel $\mathcal{K}(\Phi)$ der $\mathcal{F}_+$-wertigen, konstanten Funktionen. Zur Abkürzung schreiben wir φ_f für das durch die Konstante $f \in \mathcal{F}_+$ gegebene Element aus $\mathcal{K}(\Phi)$, d.h.

$$\varphi_f(\omega_1, \omega_2) = f \quad \text{für alle } (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega.$$

Auf Φ definieren wir eine Präordnung $\prec_\Phi$ durch

$$\varphi_1 \prec_\Phi \varphi_2 \iff \varphi_1(\omega_1, \omega_2) \prec_{(\omega_1,\omega_2)} \varphi_2(\omega_1, \omega_2) \quad \text{für fast-alle } (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega.$$

Außerdem definieren wir auf $\mathcal{K}(\Phi)$ ein lineares Funktional $\hat{\mu}$ durch

$$\hat{\mu}(\varphi_f) := \int_\Omega f d\mu \tag{3.21}$$

und auf Φ ein sublineares, $\prec_\Phi$-monotones Funktional $\hat{\pi}$ durch

$$\hat{\pi}(\varphi) := \int_{\Omega\times\Omega} p_{\varphi(\omega_1,\omega_2)}(\omega_1, \omega_2) d\tau(\omega_1, \omega_2). \tag{3.22}$$

Die Sublinearität von $\hat{\pi}$ folgt aus der von $f \mapsto p_f$ und die Monotonie folgt aus (3.20). Eine einfache Rechnung zeigt, daß (3.16) die Gültigkeit von

$$\hat{\mu}(\varphi_f) \leq \hat{\pi}(\varphi_f) \quad \forall \varphi_f \in \mathcal{K}(\Phi) \tag{3.23}$$

impliziert (ist f eine positive, einfache Funktion siehe [24], Lemma auf Seite 50; durch Approximation gilt dies dann für alle Elemente aus $\mathcal{K}(\Phi)$). Somit gilt

$$\hat{\mu} \leq \hat{\pi} \quad \text{auf } \mathcal{K}(\Phi).$$

Für das Kostenmaß γ und für $A, B \in \Sigma$ definieren wir Abbildungen

$$\tilde{\gamma}, \alpha_{A\times B} : \Omega \times \Omega \to \mathcal{F},$$

also Elemente aus Φ, durch die Festsetzung: für fast-alle $\omega \in \Omega$ und $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega$ sei

$$\alpha_{A\times B}(\omega_1, \omega_2)(\omega) := \chi_A(\omega_1)\chi_B(\omega), \tag{3.24}$$

$$\tilde{\gamma}(\omega_1, \omega_2)(\omega) := \gamma(\omega_1, \omega). \tag{3.25}$$

Durch Anwendung des Fortsetzungssatzes 2.2.5 auf die Funktionale $\hat{\mu}$ und $\hat{\pi}$ erhalten wir nun ein $\prec_\Phi$-monotones $\hat{\nu} \in \mathrm{Lin}_{\mathcal{K}(\Phi)<\Phi}(\hat{\mu}, \hat{\pi})$, so daß $\hat{\nu}(\tilde{\gamma})$ minimal ist. Wir definieren mit Hilfe dieses $\hat{\nu}$ einen Fluß ν mittels der Dichte des Maßes ζ

$$\zeta : A \times B \mapsto \hat{\nu}(\alpha_{A\times B}), \text{ d.h. } \hat{\nu}(\alpha_{A\times B}) = \int_{A\times B} \nu d\tau.$$

Wir zeigen zunächst, daß durch diese Definition ν ein zulässiger und bedarfsdeckender Fluß ist.

Für $A \cap B = \emptyset$ haben wir $0 \prec_\Phi \alpha_{A\times B}$ und somit

$$\int_{A\times B} \nu d\tau \geq 0.$$

Wegen

$$\int_{A\times B} \nu d\tau = \hat{\nu}(\alpha_{A\times B}) \leq \hat{\pi}(\alpha_{A\times B}) = \tau((A \setminus B) \times B) \leq \tau(A \times B) \tag{3.26}$$

gilt bei der Wahl $B = \Omega$ in (3.26)

$$\int_{A\times \Omega} \nu d\tau \leq \tau((A \setminus \Omega) \times \Omega) = 0,$$

und weiterhin folgt aus (3.26) offensichtlich

$$\nu \leq 1.$$

Somit erhalten wir wegen $\int_{A\times\Omega} \nu d\tau \leq 0$ die Gültigkeit von

$$\mu(A) = \hat{\mu}(\alpha_{\Omega\times A}) \leq \hat{\nu}(\alpha_{\Omega\times A}) \leq \int\limits_{(\Omega\setminus A)\times A} \nu d\tau - \int\limits_{A\times(\Omega\setminus A)} \nu d\tau.$$

Somit ist ν also zulässig und bedarfsdeckend. Damit ist (1) gezeigt, denn die Notwendigkeit der dort gegebenen Bedingung wurde schon eingangs dargelegt.

Die Transportkosten von ν sind

$$\Gamma(\gamma, \nu) = \int_{\Omega \times \Omega} \nu \gamma d\tau = \hat{\nu}(\tilde{\gamma}).$$

Diese Identität sieht man im Fall einer charakteristischen Funktion $\gamma = \chi_{A \times B}$ sofort. Den allgemeinen Fall erhält man durch ein Linearitätsargument. Der Fluß muß also kostenminimal sein, da $\hat{\nu}(\tilde{\gamma})$ als minimal angenommen wurde. Wir haben zur Bestimmung der Kosten dieses kostenminimalen Flusses somit den minimalen Wert für $\hat{\nu}(\tilde{\gamma})$ zu ermitteln. Diesen Wert können wir mittels Lemma 3.1.2 zu

$$\sup\{\hat{\mu}(\varphi_f) - \hat{\pi}(\varphi) \mid \varphi_f \prec_\Phi \tilde{\gamma} + \varphi, f \in \mathcal{F}_+, \varphi \in \Phi\}$$

bestimmen. Dieser Ausdruck wird zu

$$\begin{aligned} \hat{\nu}(\tilde{\gamma}) &= \sup\{\hat{\mu}(\varphi_f) - \hat{\pi}(\varphi) \mid \varphi_f \prec_\Phi \tilde{\gamma} + \varphi\} \\ &= \sup\{\hat{\mu}(\varphi_f) - \hat{\pi}(\varphi_f - \tilde{\gamma}) \mid \varphi_f \in \mathcal{K}(\Phi)\}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Die letzte Identität erhält man aus der Monotonie von $\hat{\pi}$ aufgrund der Tatsache, daß das minimale φ mit $\varphi_f \prec_\Phi \tilde{\gamma} + \varphi$ gerade $\varphi_f - \tilde{\gamma}$ ist. Durch Einsetzen von $\hat{\mu}$ und $\hat{\pi}$ sowie Berücksichtigung von $\gamma(\omega, \omega) = 0$ erhalten wir das Ergebnis

$$\begin{aligned} \text{minimale Kosten} &= \sup\{\hat{\mu}(\varphi_f) - \hat{\pi}(\varphi_f - \tilde{\gamma}) \mid \varphi_f \in \mathcal{K}(\Phi)\} \\ &= \sup\{\int_\Omega f d\mu - \int_{\Omega \times \Omega} \max(0, f(\omega_2) - f(\omega_1) - \gamma(\omega_1, \omega_2)) d\tau(\omega_1, \omega_2) \mid f \in \mathcal{F}_+\} \\ &= \sup\{C(f) - \rho(f, \gamma) \mid f \in \mathcal{F}_+\}. \end{aligned}$$

Die Kostenminimalität für jedes ν, welches (3.17) erfüllt, ist eine direkte Konsequenz aus Lemma 3.1.1, also der Tatsache, daß für jeden zulässigen Fluß die Transportkosten größer oder gleich der rechten Seite von (3.17) sind. ■

Man beachte an dieser Stelle, daß die Bedingung (1) in Satz 3.1.1 äquivalent der folgenden, formal schwächeren Bedingung (3) ist

Bedingung (3):

$$\int_\Omega f d\mu \leq \int_{\Omega \times \Omega} \max(0, f(\omega_2) - f(\omega_1)) d\tau(\omega_1, \omega_2) \quad \forall f \in \mathcal{F}_+. \tag{3.28}$$

Der Beweis der Äquivalenz von (1) und (3) ist — wie schon gesagt — elementar (siehe [24], Seite 50).

Der Grund, warum wir auf diese Äquivalenz explizit hinweisen ist darin zu sehen, daß eine formale Verallgemeinerung von Bedingung (3) auf Vektorverbände ohne weiteres möglich ist, während die Verallgemeinerung von Bedingung (1) auf die später betrachtete Vektorverbandssituation solche Vektorverbände voraussetzt, die hinreichend viele charakteristische Funktionen enthalten.

Neben der Übertragung auf kostenminimale Flüsse mit signierten Transportkosten erscheint uns der hier vorgelegte Beweis transparenter als der bisherige Zugang zum Fluß-Theorem für unendliche Mengen. Einerseits, weil der Rückgriff auf den Desintegrationssatz vermieden wird, und andererseits weil die Verwendung von Bimaßen (siehe [24], Seite 49) vollständig umgangen wird. Dies ist möglich durch die Ersetzung der vorher notwendigen maßtheoretischen Ungleichungen durch Aussagen über das duale Paar (L^1, L^∞). Über den Dichte-Begriff ist dadurch natürlich ein Rückgriff auf den klassischen RADON-NIKODYM-Satz notwendig. Dieser gehört jedoch eher zum Standardwerkzeug des Funktionalanalytikers als der abstrakte Desintegrationssatz auf Kegeln.

Ein Nachteil der Methode besteht darin, daß die bisher konstruktive Netzwerktheorie auf endlichen Netzwerken durch Verwendung des Sandwich-Satzes, der eine Konsequenz des Auswahlaxioms ist und von den üblichen konstruktiven Axiomen der Mengenlehre in der Formulierung von ZERMELO-FRAENKEL unabhängig ist, auf eine unkonstruktive und unalgorithmische Ebene verlagert wird. Der Frage, ob dies nötig ist, werden wir uns in Kapitel 4 zuwenden.

Ein weiterer Nachteil der gewählten Formulierung besteht darin, daß die Kostenfunktion als L^1-Funktion vorausgesetzt werden mußte. Dies hat zur Folge, daß der Versuch, durch Formulierung einer Netzwerktheorie auf unendlichen Mengen dynamische Entwicklungen im Netzwerk erfassen zu können, nur für zeitlich abklingende Kosten durchführbar ist. Ein Nachteil, dessen Beseitigung wir uns in Abschnitt 3.4 widmen.

3.1.3 Eine Anwendung: Produktion und Verteilung mit Kosten

Als Anwendung des Satzes 3.1.1 wollen wir ein Produktions- und Verteilungsproblem untersuchen. Dabei betrachten wir eine Verallgemeinerung der in [24] beschriebenen Situation, indem wir zusätzlich ein Kostenmaß voraussetzen und unter diesem Kostenmaß nach optimalen Produktions- und Verteilungsplänen fragen. Zur detaillierten Erläuterung der vorkommenden Größen und Begriffe sei auf die oben zitierte Quelle verwiesen. Die wesentlichen Begriffe werden im folgenden — unter einigen Modifikationen — ganz knapp eingeführt.

Gegeben sei eine nichtleere Gütermenge X, eine σ-Algebra Σ_X auf X und zwei disjunkte Mengen Ω_p, Ω_k mit σ-Algebren Σ_p und Σ_k. Ω_p heißt die Menge der *Produzenten* und Ω_k die der *Konsumenten*. Ferner seien gegeben endliche Maße

(1) $\alpha : \Sigma_p \to \mathbb{R}_+$ (Produktionskapazität),

(2) $\nu : \Sigma_k \to \mathbb{R}_+$ (Nachfrage),

(3) $\rho : \Sigma_p \otimes \Sigma_X \to \mathbb{R}_+$ (Herstellungsschranke),

(4) $\sigma : \Sigma_X \otimes \Sigma_k \to \mathbb{R}_+$ (Versorgungsschranke).

Das grundlegende Modell sieht folgendermaßen aus:

> Jeder Produzent $p_i \in \Omega_p$ hat eine Produktionskapazität (gegeben durch $\overline{\alpha}(p_i)$, die Dichtefunktion $\overline{\alpha}$ von α). Diese Produktionskapazität kann er nutzen um höchstens $\overline{\rho}(p_i, x)$ Stück vom Gut $x \in X$ herzustellen ($\overline{\rho}$ ist dabei die Dichte von ρ). Auf der Nachfrageseite ist die totale Nachfrage der Konsumenten $k_i \in \Omega_k$ durch $\overline{\nu}(k_i)$ gegeben, wobei er nach dem Gut $x \in X$ höchstens eine Nachfrage von $\overline{\sigma}(x, k_i)$ hat (wieder sind $\overline{\nu}$, $\overline{\sigma}$ die Dichten von ν bzw. σ).

Beim Produktions- und Verteilungsproblem ist nach der Existenz geeigneter Produktions- und Verteilungspläne gefragt. Der Produktionsplan sagt zum Beispiel dem Produzenten, wieviel seiner Kapazität er zur Produktion eines Gutes $x \in X$ verwendet. Analog sagt der Verteilungsplan, wieviel der Nachfrage des Konsumenten

k_i durch Zuteilung des Gutes $\tilde{x} \in X$ befriedigt werden soll. Natürlich sollen diese Pläne mit den vorher eingeführten Größen kompatibel sein. Formalisiert sieht das folgendermaßen aus:

Ein *Produktionsplan* ist eine $L^\infty(\rho)$-Funktion $p : \Omega_p \times X \to \mathbb{R}_+$ mit

$$p \leq 1, \tag{3.29}$$

so daß für alle $A \in \Sigma_p$ gilt

$$\int_{A \times X} p d\rho \leq \alpha(A).$$

Ein *Verteilungsplan* ist eine $L^\infty(\sigma)$-Funktion $v : X \times \Omega_k \to \mathbb{R}_+$ mit

$$v \leq 1, \tag{3.30}$$

so daß für alle $A \in \Sigma_k$ gilt

$$\nu(A) \leq \int_{X \times A} v d\sigma.$$

Ein angemessene und leichte Verallgemeinerung der Theorie (siehe [24], Seite 67) sichert uns die Existenz geeigneter Pläne genau dann, wenn für alle $Y \in \Sigma_X$

$$\nu^*_{\min}(Y) \leq \alpha^*_{\max}(Y) \tag{3.31}$$

erfüllt ist, wobei

$$\alpha^*_{\max}(Y) \ := \ (\alpha \wedge \rho(\cdot \times Y))(\Omega_p) \tag{3.32}$$

die maximale Gesamtproduktion von Gütern aus Y ist, und

$$\nu^*_{\min}(Y) \ := \ (\nu - \sigma((X \setminus Y) \times \cdot)^+(\Omega_k) \tag{3.33}$$

die entsprechende minimale Gesamtnachfrage ist. Dabei bezeichne $\wedge$ das Minimum zweier Maße und $m^+ := \sup(m, 0)$ den positiven Teil eines Maßes m. Die Größen $\rho(\cdot \times Y)$ und $\sigma(\tilde{Y} \times \cdot)$ bezeichnen dabei die auf Ω_p bzw. Ω_k durch

$$\begin{aligned} A &\mapsto \rho(A \times Y) \\ B &\mapsto \sigma(\tilde{Y} \times B) \end{aligned}$$

gegebenen Maße.

Als Erweiterung der bekannten Theorie betrachten wir nun eine $L^1(\rho)$-Funktion γ_p und eine $L^1(\sigma)$-Funktion $\hat{\gamma}_k$. Die Größe γ_p steht für die *Herstellungskosten*, d.h. im diskreten Fall bezeichnet $\gamma_p(\omega_j, x_i)$ die Herstellungskosten des Gutes $x_i \in X$ durch den Produzenten $\omega_j \in \Omega_p$. Ebenso bezeichne $\hat{\gamma}_k$ den *Konsumwert*, d.h. im diskreten Fall ist $\hat{\gamma}_k(x_i, \omega_j)$ der Wert, den der Konsument $\omega_j \in \Omega_k$ dem Gut $x_i \in X$ in seiner Wertskala zumißt. Wir setzen nicht unbedingt voraus, daß $\gamma_p, \hat{\gamma}_k$ positive Funktionen sind. Wir fassen

$$\gamma := \gamma_p \oplus (-\hat{\gamma}_k) \tag{3.34}$$

zu einem gemeinsamen Transportmaß zusammen. Als *Produktionverteilungskosten* bezeichnen wir für das Transportmaß γ sowie Pläne p und v die Größe

$$\Gamma(\gamma, p, v) := \int_{\Omega_p \times X} \gamma_p p d\rho - \int_{X \times \Omega_k} \hat{\gamma}_k v d\sigma. \tag{3.35}$$

Dies entspricht den Transportkosten im bisherigen Modell des Bedarfsnetzwerkes.

Als Preissysteme führen wir positive Funktionen

$$f : \Omega_p \,\dot{\cup}\, X \,\dot{\cup}\, \Omega_k \to \mathbb{R}_+ \tag{3.36}$$

ein, von denen wir voraussetzen, daß sie absolut-integrabel bezüglich der Marginalen von $\sigma \oplus \rho$ sind. Bei vorgegebenem Preissystem f bezeichnen wir

$$C(f) = \int_{\Omega_k} f d\nu - \int_{\Omega_p} f d\alpha \tag{3.37}$$

als den *Konsum*. Dies entspricht unseren bisherigen Verbrauchskosten. Als *optimale Wertschöpfung* führen wir ein:

$$\begin{aligned} W(f,\gamma) \; &:= \; \int_{\Omega_p \times X} \max(0, f(x) - f(\omega) - \gamma_p((\omega, x))d\rho((\omega, x)) + \\ & \quad \int_{X \times \Omega_k} \max(0, f(\omega) - f(x) + \hat{\gamma}_k((x, \omega))d\sigma((x, \omega)) \\ &= \; \int_{\Omega_p \times X} \max(0, f(x) - f(\omega) - \gamma((\omega, x))d\rho((\omega, x)) + \\ & \quad \int_{X \times \Omega_k} \max(0, f(\omega) - f(x) - \gamma((x, \omega))d\sigma((x, \omega)). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Die relevante Frage ist nun, ob die optimale Wertschöpfung durch zulässige Produktionverteilungspläne realisiert werden kann, denn völlig analog zu Lemma 3.1.1 gilt:

Lemma 3.1.3: *Für jedes Preissystem f und jedes Paar zulässiger Produktionverteilungspläne (p, v) gilt, daß die Produktionverteilungskosten größer oder gleich der Differenz zwischen Konsum und optimaler Wertschöpfung sind.*

Zum Beweis faßt man Produktionskapazität α und Nachfrage ν zu einem gemeinsamen Bedarfsmaß sowie Herstellungsschranke ρ und Versorgungsschranke σ zu einer Kapazität τ zusammen und geht dann wie beim Beweis von Lemma 3.1.1 vor.

Die Frage nach der Realisierung optimaler Wertschöpfung reduziert sich damit zu der Frage, ob es ein Preissystem gibt, so daß die optimale Wertschöpfung genau gleich der Differenz zwischen Konsum und Produktionverteilungskosten sind.

Diese Frage wird für den vorliegenden Fall im folgenden Satz positiv beantwortet.

Satz 3.1.2: *(1) Es gibt geeignete Pläne genau dann, wenn für jedes meßbare $Y \subset X$ das maximale Gesamtangebot die minimale Gesamtnachfrage dominiert, wenn also*

$$\alpha^*_{\max}(Y) \geq \nu^*_{\min}(Y) \quad \forall Y \in \Sigma_X. \tag{3.39}$$

(2) Gibt es geeignete Pläne, dann gibt es auch optimale Pläne p und v, so daß die Produktionverteilungskosten gleich dem Supremum (über alle Preissysteme) der Differenz zwischen Konsum und optimaler Wertschöpfung sind.

Zum Beweis brauchen wir nur $\nu \oplus (-\alpha)$ zu einem Bedarfsmaß und $\rho \oplus \sigma$ zu einem Kapzitätsmaß zusammenfassen und die relevanten Größen von Satz 3.1.1 in die neue Terminologie umzurechnen.

3.2 Kostenminimale maximale Flüsse in Flußnetzwerken

Wir wollen jetzt untersuchen, inwieweit kostenminimale Flüsse Beurteilungskriterien für die Maximalität von Flüssen enthalten. Zu diesem Zweck greifen wir das Profitabilitätskriterium des letzten Abschnittes 3.1 wieder auf. Wir betrachten dafür *höchst-profitable Flüsse*, das sind bei gegebenem Preissystem f solche, bei denen Verbrauchskosten minus Transportkosten gleich dem optimalen Transportprofit[2)]sind.

Ganz offensichtlich sind höchst-profitable Flüsse nicht automatisch maximal (wie das Beispiel des Nullflusses in einem kostenfreien Netzwerk, also mit Preisen überall gleich Null, zeigt). Will man aber über Anpassung des Preissystems durch höchst-profitable Flüsse einen maximalen Fluß erzielen, so benötigt man Kriterien an das Preissystem, die garantieren, daß höchst-profitable Flüsse automatisch maximal werden. Mit ausreichender Intuition ist so ein Kriterium leicht geraten:

> *Sind die Preisdifferenzen zwischen Senken und Quellen ausreichend hoch, so ist jeder höchst-profitable Fluß maximal.*

Es geht im folgenden darum, dieses vernünftig erscheinende Prinzip zu formalisieren, und die entsprechend konkretisierten Aussagen zu beweisen. Um diese Situation zu untersuchen, betrachten wir Flußnetzwerke mit sogenannter regulärer Transportkostenfunktion und mit fixiertem Preissystem. Wir erläutern dies:

Gegeben sei ein Meßraum (Ω, Σ) mit geeigneter σ-Algebra Σ, $D_\Omega = \{(\omega, \omega) \mid \omega \in \Omega\}$ sei seine Diagonale, $q \neq s$ zwei ausgezeichnete Elemente von Ω, genannt Quelle und Senke sowie τ ein σ-endliches Maß auf $\Omega \times \Omega$ mit

$$\tau(\{q\} \times \Omega) < \infty.$$

Weiter sei gegeben $\gamma : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine τ-absolut-integrable Funktion, genannt *Kostenfunktion*, welche auf der Diagonalen D_Ω fast-überall verschwindet und von

[2)]Dies ist die geeignete Definition für Bedarfsnetzwerke. Bei den später betrachteten Flußnetzwerken modifizieren wir diese Definition geringfügig.

der wir voraussetzen, daß sie *regulär* ist; das soll heißen

$$\gamma(\omega_1, \omega_2) + \gamma(\omega_2, \omega_1) \geq 0 \quad \text{fast-überall } (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega.$$

Mit dieser Bedingung wird ausgeschlossen, daß man mit Profit von ω_1 nach ω_2 und wieder zurück transportieren kann. Wir nennen ein Netzwerk *vollständig regulär*, wenn die Summe der Transportkosten entlang eines einfachen Kreises größer Null ist, wenn also für jeden einfachen Weg $\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1} = \omega_1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma(\omega_i, \omega_{i+1}) \geq 0. \tag{3.40}$$

Gilt in (3.40) sogar $>$, dann heißt das Netzwerk *echt vollständig regulär*. Weiterhin fixieren wir eine bezüglich der Marginalmaße τ_1 und τ_2 absolut-integrable Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$, die *lokales Preissystem* genannt wird; dabei sind $\tau_1(A) := \tau(A \times \Omega)$ und $\tau_2(A) := \tau(\Omega \times A)$ die Marginalmaße von τ.

Ein Bedarfsmaß wird nicht vorgegeben. Da dieses zur Anwendung der Argumente aus dem vorhergehenden Abschnitt jedoch manchmal notwendig ist, setzen wir

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } q \notin A \\ -\tau(\{q\} \times \Omega), & \text{wenn } q \in A. \end{cases}$$

Die Bedarfsfunktion ist damit so gewählt, daß jede $L^\infty(\tau)$-Funktion ν mit

$$\nu \leq 1, \tag{3.41}$$

$$\int_{A \times B} \nu d\tau \geq 0 \quad A \cap B = \emptyset \tag{3.42}$$

sowie mit

$$\int_{\tilde{\Omega} \times A} \nu d\tau = \int_{A \times \tilde{\Omega}} \nu d\tau \quad \forall A \in \tilde{\Omega} \cap \Sigma, \tag{3.43}$$

wobei $\tilde{\Omega} \cap \Sigma$ die Spur von Σ in $\tilde{\Omega} := \Omega \setminus \{q, s\}$ bezeichnet, ein τ-zulässiger, bedarfsdeckender Fluß ist. Wir bezeichnen daher im folgenden eine $L^\infty(\tau)$-Funktion ν, die (3.41)–(3.43) erfüllt, als einen *zulässigen Fluß*.

Kosten $\Gamma(\nu, \gamma)$ eines Flusses ν, Verbrauchskosten $C(f)$ und optimaler Transportprofit $\rho(f, \gamma)$ sind wie bisher definiert (vgl. (3.4), (3.7), (3.9)). Als *Profit* eines Flusses ν bezeichnen wir

$$G(\nu) := \int_{\Omega \times \Omega} \nu(\omega_1, \omega_2)(f(\omega_2) - f(\omega_1) - \gamma(\omega_1, \omega_2)) d\tau(\omega_1, \omega_2).$$

Ein Fluß ν heißt *höchst-profitabel*, wenn $G(\nu)$ gleich dem optimalen Transportprofit ist, d.h. wenn gilt

$$G(\nu) = \rho(f, \gamma).$$

Durch Beachtung der Definition des optimalen Transportprofites sieht man sofort[3)]

Charakterisierung 3.2.1: *Ein Fluß ν ist genau dann höchst-profitabel, wenn fast-überall die beiden folgenden Aussagen gelten:*

(1) $f(\omega_2) - f(\omega_1) - \gamma(\omega_1, \omega_2) < 0 \;\Rightarrow\; \nu(\omega_1, \omega_2) = 0$

(2) $f(\omega_2) - f(\omega_1) - \gamma(\omega_1, \omega_2) > 0 \;\Rightarrow\; \nu(\omega_1, \omega_2) = 1$

Im allgemeinen gilt

$$G(\nu) \leq \rho(f, \gamma),$$

was man aus (3.8) und der Nichtnegativität von ν außerhalb der Diagonalen erkennt. Es kann jedoch durchaus der Fall sein, daß es zu einem gegebenen Preissystem keinen höchst-profitablen Fluß gibt. Ein Fluß heißt *echt-profitabel*, wenn

$$G(\nu) > 0.$$

Als *Stärke* eines zulässigen Flusses ν definieren wir wie in der endlichen Situation

$$\mathcal{V}_F(\nu) := \int_{\Omega \times \{s\}} \nu d\tau - \int_{\{s\} \times \Omega} \nu d\tau. \tag{3.44}$$

Ein zulässiger Fluß ν heißt *blockierend* (oder τ-*blockierend*), wenn es keinen zulässigen Fluß $\hat{\nu} \geq \nu$ mit $\mathcal{V}_F(\hat{\nu}) > \mathcal{V}_F(\nu)$ gibt. Dies ist offensichtlich eine Verallgemeinerung von Definition 2.1.7. Wir nennen ein Preissystem τ-*stimulierend*, wenn jeder zulässige Fluß ν mit $\mathcal{V}_F(\nu) > 0$ echt-profitabel ist.

Wir beachten nun, daß ein zulässiger Fluß ν bezüglich einer Kapazität τ auf kanonische Weise auch als zulässiger Fluß $\tilde{\nu}$ bezüglich einer vergrößerten, σ-endlichen Kapazität $\tilde{\tau} \geq \tau$ aufgefaßt werden kann. Dafür repräsentieren wir τ einfach durch seine fast-überall eindeutige Dichtefunktion d_τ bezüglich $\tilde{\tau}$ und setzen

$$\tilde{\nu}(\omega_1, \omega_2) := \nu(\omega_1, \omega_2) d_\tau(\omega_1, \omega_2) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega. \tag{3.45}$$

3) Man vergleiche dazu die üblichen Optimalitätsbedingungen des komplementären Schlupfes (Complementary-Slackness-Bedingungen) angewandt auf das MCFP, z.B. in [18] oder [1].

Dann gilt offensichtlich für meßbare $A, B \subset \Omega$, daß der dadurch gegebene Fluß von A nach B ungeändert bleibt, denn

$$\int_{A\times B} \nu d\tau \;=\; \int_{A\times B} \nu d_\tau d\tilde{\tau} \;=\; \int_{A\times B} \tilde{\nu} d\tilde{\tau}. \tag{3.46}$$

Wenn Verwechselungsmöglichkeiten ausgeschlossen sind, bezeichnen wir deshalb $\tilde{\nu}$ ebenfalls durch das Symbol ν.

Wir betrachten nun eine gegebene Kapazität τ und einen darauf bezogenen zulässigen Fluß ν. Als *erweiterte Kapazität* bezeichnen wir nun das Maß τ_ν, gegeben durch

$$\tau_\nu(M) := \tau(M) + \int_{M\setminus D_\Omega} \nu(\omega_2, \omega_1) d\tau(\omega_1, \omega_2) \quad \text{für } M \in \Omega \times \Omega,$$

also

$$\tau_\nu := \tau + (\nu^T \vee 0), \tag{3.47}$$

wobei ν^T das zum Maß, welches durch die Dichte ν gegeben ist, transponierte Maß ist. Das Symbol $\vee$ bezeichnet dabei das Maximum der beiden Maße. Die Diagonale D_Ω wurde bei dieser Definition herausgenommen, da über die Positivität von ν auf dieser Menge keine Information vorliegt. Im diskreten Fall ist die erweiterte Kapazität genau die Erweiterung um die durch den Fluß ν gegebene Kapazität der Rückwärtskanten unter Beibehaltung der Kapazität der Vorwärtskanten.

Lemma 3.2.1: *Bei regulärer Kostenfunktion ist jeder bezüglich τ höchst-profitable und zulässige Fluß ν auch höchst-profitabel und zulässig bezüglich τ_ν.*

Beweis

Sei ν zulässig und höchst-profitabel bezüglich τ. Offensichtlich ist die durch (3.45) gegebene Interpretation $\tilde{\nu}$ dieses Flusses bezüglich τ_ν zulässig. Wir müssen also nur zeigen, daß $\tilde{\nu}$ höchst-profitabel bezüglich τ_ν ist. Dafür verwenden wir die Charakterisierung 3.2.1. Wir müssen also zeigen, daß fast-überall gilt:

(1) $f(\omega_2) - f(\omega_1) - \gamma(\omega_1, \omega_2) < 0 \;\Rightarrow\; \tilde{\nu}(\omega_1, \omega_2) = 0$ und

(2) $f(\omega_2) - f(\omega_1) - \gamma(\omega_1, \omega_2) > 0 \;\Rightarrow\; \tilde{\nu}(\omega_1, \omega_2) = 1$

Die Aussage (1) folgt aber sofort aus der entsprechenden Aussage für ν. Für (2) beachten wir, daß für $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega$ aus der linken Ungleichung und der Regularität der Kostenfunktion folgt, daß

$$f(\omega_1) - f(\omega_2) - \gamma(\omega_2, \omega_1) < 0,$$

womit aus der Höchst-Profitabilität von ν folgt, daß $\nu(\omega_2, \omega_1) = 0$ gilt, was nach der Definition für die erweiterte Kapazität τ_ν für die Dichte von τ bezüglich dieser Kapazität

$$d_\tau(\omega_1, \omega_2) = 1$$

impliziert. Damit haben wir für dieses Punktepaar $\tilde{\nu}(\omega_1, \omega_2) = \nu(\omega_1, \omega_2)$. Die Aussage (2) folgt also aus der Höchst-Profitabilität von ν. ■

Zur Vereinfachung der folgenden Argumentation definieren wir nun die Transponierte φ^T einer Funktion auf $\Omega \times \Omega$ durch

$$\varphi^T(\omega_1, \omega_2) := \varphi(\omega_2, \omega_1) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega.$$

Man beachte, daß unter Verwendung dieser Notation für die in (3.44) definierte Stärke gilt

$$\mathcal{V}_F(\nu) = \mathcal{V}_F(-\nu^T). \tag{3.48}$$

Die Maximalität eines Flusses wird genau wie im endlichen Fall eingeführt. Ein τ-zulässiger Fluß ν heißt *τ-maximal*, wenn für jeden anderen τ-zulässigen Fluß $\hat{\nu}$ gilt

$$\mathcal{V}_F(\nu) \geq \mathcal{V}_F(\hat{\nu}),$$

wenn also ν maximale Stärke hat.

Wir wollen nun maximale Flüsse durch die erweiterte Kapazität charakterisieren. Die direkte Übertragung von Lemma 2.1.2 scheidet aus, da die hier definierte erweiterte Kapazität nicht die Verallgemeinerung der klassischen Restkapazität ist.

Lemma 3.2.2: *Es sei ν ein τ-zulässiger Fluß. Dann sind äquivalent:*

(1) ν ist τ_ν-blockierend.

(2) ν ist τ-maximal.

Beweis

(1) $\Rightarrow$ (2): Es sei $\hat{\nu}$ ein weiterer beliebiger τ-zulässiger Fluß. Wir definieren

$$\begin{aligned}(\hat{\nu}-\nu)_+ &:= \max(\hat{\nu}-\nu, 0),\\ (\nu-\hat{\nu})_+ &:= \max(\nu-\hat{\nu}, 0).\end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\hat{\nu}-\nu = (\hat{\nu}-\nu)_+ - (\nu-\hat{\nu})_+.$$

Durch Transposition definieren wir nun

$$\tilde{\nu} := (\hat{\nu}-\nu)_+ + (\nu-\hat{\nu})_+^T + \nu.$$

Offensichtlich ist $\tilde{\nu}$ nun τ_ν-zulässig und außerdem hat es die gleiche Stärke wie $\hat{\nu}$, also

$$\mathcal{V}_F(\hat{\nu}) = \mathcal{V}_F(\tilde{\nu}), \tag{3.49}$$

und weiterhin gilt offenbar

$$\tilde{\nu} \geq \nu. \tag{3.50}$$

Da nun ν als τ_ν-blockierend vorausgesetzt war, haben wir nach Definition $\mathcal{V}_F(\tilde{\nu}) \leq \mathcal{V}_F(\nu)$. Das zeigt aber gerade die Maximalität von ν.

(2) $\Rightarrow$ (1): Obwohl wir diese Aussage im folgenden nicht benötigen, wollen wir den Beweis dennoch kurz skizzieren. Wir betrachten ein τ_ν-zulässiges $\tilde{\nu} \geq \nu$. Dann gilt

$$(\tilde{\nu}-\nu) \leq (\tau-\nu) + (\nu^T \vee 0).$$

Wir führen nun eine Zerlegung in positive Maße durch

$$(\tilde{\nu}-\nu) = m_1 + m_2,$$

wobei $m_1 \leq (\tau-\nu)$ und $m_2 \leq \nu^T$. Durch Transposition erhalten wir dann

$$m_2^T \leq \nu.$$

Nun definieren wir ein $\hat{\nu}$ durch

$$0 \leq \hat{\nu} := \nu - m_2^T + m_1.$$

Dann ist $\hat{\nu}$ τ-zulässig, und wegen (3.48) haben wir

$$\mathcal{V}_F(\hat{\nu}) = \mathcal{V}_F(\tilde{\nu}).$$

Nach Voraussetzung war ν maximal, deshalb gilt

$$\mathcal{V}_F(\hat{\nu}) \leq \mathcal{V}_F(\nu),$$

und folglich auch

$$\mathcal{V}_F(\tilde{\nu}) \leq \mathcal{V}_F(\nu).$$

Das bedeutet aber gerade, daß ν τ_ν-blockierend ist. ■

Satz 3.2.1: *Sei ν ein höchst-profitabler Fluß bezüglich des Preissystems f.*

(1) Wenn f ein τ-stimulierendes Preissystem ist, dann ist ν blockierend.

(2) Wenn f sogar τ_ν-stimulierend ist, dann ist ν maximal.

Beweis

(1) Gäbe es einen zulässigen Fluß $\hat{\nu} \geq \nu$ mit $\mathcal{V}_F(\hat{\nu}) > \mathcal{V}_F(\nu)$, so könnten wir wegen des τ-stimulierenden Preissystems auch $(\hat{\nu} - \nu)$ als echt-profitabel annehmen. Damit wäre der Profit von $\hat{\nu}$ echt größer als der Profit von ν. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung, daß ν höchst-profitabel ist.

(2) Nach Lemma 3.2.1 ist ein höchst-profitabler Fluß bezüglich τ auch höchst-profitabel bezüglich τ_ν. Damit ist nach (1), sofern das Preissystem τ_ν-stimulierend ist, der durch ν gegebene Fluß bei erweiterter Kapazität τ_ν auch blockierend, also wegen Lemma 3.2.2 auch maximal. ■

Definition 3.2.1: *Wenn für jeden τ-zulässigen Fluß ν das Preissystem f τ_ν-stimulierend ist, dann sagen wir, daß das Preissystem* ausreichendes Gefälle *habe.*

Folgerung 3.2.1: *Bei Preissystemen mit ausreichendem Gefälle ist jeder höchst-profitable Fluß maximal.*

Wir wollen diese Folgerung nun auf diskrete Netzwerke anwenden. In Verallgemeinerung zu Definition 2.1.6 nennen wir einen Weg, der über Vorwärts- und Rückwärtskanten führt, einen *erweiternden Weg*. Als Transportkosten entlang einer Rückwärtskante nehmen wir die negativen Kosten der zugeordneten Vorwärtskante. Als *akkumulierte Transportkosten* entlang eines erweiternden Weges bezeichnen wir die Summe der Kosten entlang der einzelnen Kanten des Weges.

3.2.1 Anwendung

Sei Ω ein endliches oder abzählbares Netzwerk mit Quelle und Senke. Die Preisdifferenz zwischen Senke und Quelle sei echt größer als das Supremum der akkumulierten Transportkosten über alle einfachen, erweiternden Wege von der Quelle zur Senke. Dann hat das Preissystem offensichtlich ausreichendes Gefälle. Also ist in diesem Fall jeder höchst-profitable Fluß maximal.

Die Frage, ob es zumindest für endliche Flußnetzwerke Preissysteme mit ausreichendem Gefälle gibt, welche höchst-profitable Flüsse zulassen, bleibt an dieser Stelle offen. Wir wenden uns ihr im nächsten Abschnitt zu.

3.3 Existenz optimaler Preissysteme in endlichen Netzwerken

In diesem Abschnitt wollen wir die Frage klären, ob es immer Preissysteme mit ausreichendem Gefälle gibt, die höchst-profitable Flüsse zulassen. Diese Preissysteme nennen wir *optimal*. Das Interesse an dieser Frage rührt daher, daß bei gegebenem optimalen Preissystem ein maximaler Fluß mit minimalen Kosten leicht durch lokale Kriterien zu bestimmen ist. Unter *lokalen Kriterien* verstehen wir solche, bei denen jeder Knoten (als Akteur betrachtet) sein Verhalten nur unter Beachtung der Preise an den Nachbarknoten bestimmen kann. Andererseits kann man sich die Existenz eines optimalen Preissystems als Grundlage einer Reihe algorithmischer Verfahren vorstellen; Verfahren bei denen die Akteure (Knoten) unter Marktgesichtspunkten Preisanpassungen so vornehmen, daß das angestrebte optimale Preissystem als Gleichgewicht approximiert wird.

An dieser Stelle wollen wir hervorheben, daß die Existenz optimaler Preissysteme nicht aus den bekannten „Dual-Cost-Improvement-Algorithmen“, wie beispielsweise dem Sequential-Shortest-Path-Algorithmus [7, 35, 36] oder dem Primal-Dualen-Algorithmus [18], folgt. Diese Algorithmen ergeben nur, daß es zu kostenminimalen Flüssen auch Preissysteme gibt, welche diese Flüsse als höchst-profitable Flüsse haben. Über die Preisdifferenz zwischen Quelle und Senke ist dadurch nur ausgesagt, daß es bei Flußstärke $\mathcal{V}_F(\nu) > 0$ einen profitablen Weg gibt, aber keinesfalls, daß alle Wege zwischen Quelle und Senke profitabel sind. Zur Verdeutlichung dieses Gesichtspunktes ist in Abschnitt 3.3.1 ein kurzer Überblick über die entsprechenden Algorithmen angehängt.

Die aufgeworfenen Fragen werden wir allerdings nur für endliche Netzwerke klären. Der Grund für diese Beschränkung ist darin zu sehen, daß selbst für den noch als konkret anzusehenden Fall von L^1-L^∞-Netzwerken (L^1-Kosten, L^∞-Flüsse) „optimale“ Preissysteme im allgemeinen nur in einer Erweiterung der dieser Situation zugrundeliegenden Vektorräume zu erwarten sind. Um diese Bemerkung zu verstehen sollte man beachten, daß geeignete Preissysteme für die nach Satz 3.1.1 gegebenen kostenminimalen Flüsse nur existieren, wenn das Supremum in (3.17) als Maximum angenommen wird. Bei geeigneter Analyse des Beweises sieht man, daß dies voraussetzt, daß eine gegebene L^∞-Funktion ihr Maximum auf einer beschränkten, abgeschlossenen Menge in L^1 annehmen muß — was im allgemeinen nicht zu erwarten ist, da selbst die Einheitskugel im L^∞-Prädual L^1 nicht $\sigma(L^1, L^\infty)$-kompakt ist (hierbei ist $\sigma(L^1, L^\infty)$ die schwächste lokalkonvexe Topologie in L^1, so daß die durch L^∞ kanonisch gegebenen linearen Funktionale stetig sind). An diesem Argument sieht man, daß man optimale Preissysteme im allgemeinen nur im Bidual von L^1 erwarten kann. In der endlichen Situation ist dies allerdings wegen der Reflexivität endlich-dimensionaler Räume unproblematisch.

Wir beschränken uns also im Rest dieses Abschnittes auf endliche Netzwerke.

Wir beginnen unsere Betrachtungen damit, daß wir zu gegebenem kostenminimalem Fluß ein geeignetes Preissystem konstruieren wollen, welches diesen Fluß als höchst-profitablen Fluß hat. Natürlich kann man die Existenz eines solchen Preissystems aus dem Dualitätssatz (vgl. Satz 2.1.3) oder auch aus den bereits zitierten Algorithmen [7, 18, 35, 36], die gleichzeitig mit der Berechnung eines kostenminimalen Flusses ein solches Preissystem bestimmen, folgern. Wir wollen aber anders vorgehen und ein algorithmisch-konstruktives Verfahren angeben, welches uns zusätzliche Einsichten in die mögliche Maximalität der dadurch gegebenen Flüsse liefert. Wir fixieren ein Flußnetzwerk $N = (V, E, \tau, q, s)_F$ mit Kostenfunktion γ und einen zulässigen, konservativen Fluß ν in N. Mit E_ν bezeichnen wir die Kantenmenge des Restnetzwerkes und mit γ_ν die Restkosten. Den Knoten w nennen wir *Nachbarknoten* des Knotens v, wenn $(v, w) \in E_\nu$.

Definition 3.3.1: *Zu einem gegebenen Preissystem $f : V \to \mathbb{R}_+$ wird das zugehörige* Einstandspreissystem $E(f)$ *definiert durch*

$$E(f)(v) := \max(f(v), \max\{f(w) - \gamma_\nu(v, w) \mid (v, w) \in E_\nu\}) \quad \forall v \in V. \tag{3.51}$$

Die Abbildung E heißt Einstandspreisiteration.

Zum Verständnis dieser Definition ist eine Interpretation angebracht:

> Der Einstandspreis $E(f)(v)$ beim Knoten v ist über eine minimale Preiserhöhung definiert, die so vorgenommen wird, daß bei unveränderten Preisen in den Nachbarknoten
>
> (1) bei keiner zu v führenden Kante, die einen Fluß > 0 trägt, ein Verlust auftritt;
>
> (2) bei keiner von v wegführenden Kante durch Erhöhung des Flusses im Rahmen der gegebenen Kapazitäten der Gewinn vergrößert werden kann.

Aus dieser Interpretation ergibt sich sofort:

Beobachtung 3.3.1: *Der Fluß ν ist genau dann höchst-profitabel bezüglich des Preissystems f, wenn*

$$E(f) = f, \tag{3.52}$$

wenn also f ein Fixpunkt der Einstandspreisiteration ist.

Definition 3.3.2: *Sei f ein Preissystem.*

(1) Die Folge von Preissystemen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*, gegeben durch*

$$f_0 := f, \quad f_{n+1} := E(f_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.53}$$

heißt Einstandspreisfolge.

(2) Ein Knoten $v \in V$ *heißt* fast-konstant *(bezüglich* (ν, f)*), wenn es ein* $m \in \mathbb{N}_0$ *gibt, so daß*

$$f_n(v) = f_m(v) \quad \forall n \geq m. \tag{3.54}$$

Definition 3.3.3: *Es sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Einstandspreisfolge. Dann heißt*

$$(M, (v_0, \ldots, v_m)) \tag{3.55}$$

mit $M \geq m+1$ *und benachbarten Knoten* $v_0, \ldots, v_m$ *eine* Preiserhöhungsfolge, *wenn gilt*

$$\begin{aligned} f_{M-k}(v_k) &= f_{M-k-1}(v_{k+1}) - \gamma_\nu(v_k, v_{k+1}) \quad \forall k = 0, \ldots, m-1, && (3.56)\\ f_{M-k}(v_k) &> f_{M-k-1}(v_k) \quad \forall k = 0, \ldots, m. && (3.57) \end{aligned}$$

Die Zahl M *heißt die* Knotenzahl *der Preiserhöhungsfolge und* v_0 *heißt deren* Anfangsknoten.

Lemma 3.3.1: *Es sei* $M > 0$, $M \in \mathbb{N}$*, und* v_0 *ein Knoten mit*

$$f_M(v_0) > f_{M-1}(v_0). \tag{3.58}$$

Dann gibt es eine Preiserhöhungsfolge

$$(M, (v_0, \ldots, v_{M-1})) \tag{3.59}$$

mit Knotenzahl M *und Anfangsknoten* v_0.

Beweis

Sei $(M, (v_0, \ldots, v_m))$ eine Preiserhöhungsfolge mit maximaler Knotenzahl $m \leq M-1$ und Anfangsknoten v_0. Eine solche existiert sicherlich, da es Preiserhöhungsfolgen mit Anfangsknoten v_0 gibt, z.B. $(M, (v_0))$. Zum Nachweis der Behauptung müssen wir $m = M - 1$ zeigen. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen deshalb $m < M - 1$ an. Nach Definition der Preiserhöhungsfolge gilt

$$f_{M-m}(v_m) > f_{M-m-1}(v_m), \tag{3.60}$$

und nach Definition der Einstandspreisiteration gibt es deshalb einen Nachbarknoten $w \neq v_m$ mit

$$f_{M-m}(v_m) = f_{M-m-1}(w) - \gamma_\nu(v_m, w).$$

Wäre $f_{M-m-2}(w) = f_{M-m-1}(w)$, so hätten wir im Widerspruch zu (3.60)

$$\begin{aligned} f_{M-m-1}(v_m) &\geq f_{M-m-2}(w) - \gamma_\nu(v_m, w) \\ &= f_{M-m-1}(w) - \gamma_\nu(v_m, w) \\ &= f_{M-m}(v_m). \end{aligned}$$

Die Monotonie der Einstandspreisiteration liefert folglich

$$f_{M-m-1}(w) > f_{M-m-2}(w).$$

Damit ist im Widerspruch zur Maximalität der Folge $(M, (v_0, \ldots, v_m))$ auch

$$(M, (v_0, \ldots, v_m, w))$$

eine Preiserhöhungsfolge. Folglich war die Annahme $m < M - 1$ falsch und es gilt $m = M - 1$, d.h. es gibt die behauptete Preiserhöhungsfolge. ■

Satz 3.3.1: *Es seien $N = (V, E, \tau, q, s)_F$ ein endliches Flußnetzwerk, f ein beliebiges Preissystem und ν ein zulässiger Fluß in N. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) ν ist ein Fluß mit minimalen Kosten.

(2) Jeder Knoten ist fast-konstant; die Einstandspreisfolge erreicht also nach endlich vielen Schritten einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}_0$, so daß $E(f_m) = f_m$.

Beweis

(2) $\Rightarrow$ (1): Aus Beobachtung 3.3.1 folgt, daß ν höchst-profitabel bezüglich f_m ist. Damit ist ν auch ein Fluß minimaler Kosten.

(1) $\Rightarrow$ (2): Offensichtlich gibt es ein N_0, so daß die $f_n(v)$, $n \geq N_0$, für alle fast-konstanten Knoten v konstant sind. Wir setzen

$$M_0 := N_0 + |V| + 1,$$

wobei $|V|$ die Anzahl der Knoten im Netzwerk ist. Wir nehmen nun an, daß es einen nicht fast-konstanten Knoten v_0 gibt. Für diesen muß es ein $M \geq M_0$ geben, so daß

$$f_M(v_0) > f_{M-1}(v_0).$$

Damit gibt es nach Lemma 3.3.1 eine Preiserhöhungsfolge

$$(M, (v_0, \ldots, v_{M-1}))$$

mit Knotenzahl M und Anfangsknoten v_0. Wir betrachten die ersten $|V|+1$ Knoten dieser Folge. Unter diesen Knoten muß wenigstens einer mehrfach vorkommen, da die Gesamtzahl der Knoten im Netzwerk gleich $|V|$ ist. Sei v_{k_0} das erste Auftreten dieses Knotens. Dann gibt es in der Knotenfolge $(v_0, \ldots, v_{M-1})$ einen Kreis $(\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_K)$ der Länge K, wobei $\tilde{v}_0 = v_{k_0} = \tilde{v}_K$, und mit $2 < K + 1 \leq |V| + 1$. Offensichtlich ist nun

$$(M - k_0, (\tilde{v}_0, \ldots, \tilde{v}_K))$$

mit $\tilde{v}_K = \tilde{v}_0$ eine Preiserhöhungsfolge. Durch sukzessives Einsetzen der entsprechenden Gleichungen (3.56) erhalten wir

$$f_{M-k_0}(\tilde{v}_0) = f_{M-k_0-K}(\tilde{v}_0) - \sum_{j=0}^{K-1} \gamma_\nu(\tilde{v}_j, \tilde{v}_{j+1}).$$

Mit (3.57) erhalten wir dann

$$\sum_{j=0}^{K-1} \gamma_\nu(\tilde{v}_j, \tilde{v}_{j+1}) = f_{M-k_0-K}(\tilde{v}_0) - f_{M-k_0}(\tilde{v}_0) < 0. \tag{3.61}$$

Der gefundene Kreis hat also negative Kosten. Nach Lemma 2.1.4 ist dies ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß der Fluß ν kostenminimal ist. Folglich war die

Annahme der Existenz nicht fast-konstanter Knoten falsch, d.h. alle Knoten des Netzwerkes sind fast-konstant. ∎

Als Konsequenz erhalten wir

Folgerung 3.3.1: [4] *Zu jedem zulässigen, kostenminimalen Fluß ν in einem endlichen Flußnetzwerk gibt es ein Preissystem bezüglich welchem ν höchst-profitabel ist.*

Folgerung 3.3.2: *Für jeden zulässigen, kostenminimalen Fluß ν in einem Netzwerk mit $|V|$ Knoten erreicht die Einstandspreisiteration nach höchstens $|V|$ Iterationsschritten einen Fixpunkt.*

Beweis

Wir nehmen an, daß nach $|V|$ Iterationsschritten kein Fixpunkt erreicht ist. Dann gibt es eine Preiserhöhungsfolge mit einer Knotenzahl $> |V|$. Diese müsste folglich einen Kreis enthalten, welcher (3.61) genügt. Wegen Lemma 2.1.4 widerspricht dies der Kostenminimalität von ν. ∎

Wir gehen jetzt daran, für ein beliebiges endliches Flußnetzwerk $N = (V, E, \tau, q, s)_F$ ein optimales Preissystem zu konstruieren. Wir bestimmen zuerst einen maximalen, konservativen Fluß, dessen Stärke sei $\mathcal{V}_F$. Dann bilden wir daraus ein Bedarfsnetzwerk, indem wir der Quelle den Bedarf $-\mathcal{V}_F$ zuordnen und der Senke den Bedarf $\mathcal{V}_F$. Nach Satz 3.1.1 gibt es dann einen bedarfsdeckenden, zulässigen, kostenminimalen Fluß ν. Damit haben wir also einen kostenminimalen, maximalen, konservativen Fluß im ursprünglichen Flußnetzwerk gefunden. Wir betrachten nun das diesem Fluß zugeordnete Restnetzwerk und in diesem alle von der Quelle ausgehenden einfachen Wege (inklusive des leeren Weges mit Transportkosten $= 0$). Das Infimum über die akkumulierten Transportkosten dieser Wege bezeichnen wir mit Λ:

$$\Lambda := \inf\{\text{akkumulierte Transportkosten}(W) \mid W \text{ einfacher Weg mit } q \in W\}.$$

Da der leere Weg zur Infimumbildung beiträgt, haben wir $\Lambda \leq 0$. Des weiteren bezeichnen wir mit A das Supremum über die akkumulierten Transportkosten der

[4] Vgl. auch Complementary-Slackness-Bedingungen für das MCFP, z.B. in [18].

einfachen, erweiternden Wege (des ursprünglichen Netzwerkes) von der Quelle zur Senke.

Diese Größen benutzen wir nun zur Definition eines Anfangspreissystems. Wir setzen dafür:

$$f(v) := \begin{cases} C & \text{wenn } v = q \\ C + A + \epsilon & \text{wenn } v = s \\ C + \Lambda & \text{sonst,} \end{cases} \tag{3.62}$$

wobei $C = -\Lambda + |A|$ und $\epsilon > 0$ (beliebig). Die Translation C wurde gewählt, damit das Preissystem vereinbarungsgemäß nichtnegativ ist. Wir betrachten dann die sich daraus ergebende Einstandspreisfolge. Diese erreicht wegen Satz 3.3.1 nach endlich vielen Schritten einen Fixpunkt, da ν kostenminimal ist.

<u>**Lemma 3.3.2:**</u> *Für den Fixpunkt $\hat{f}$ der sich aus f ergebenden Einstandspreisfolge gilt*

$$\hat{f}(q) = C. \tag{3.63}$$

Beweis

Wir nehmen das Gegenteil an, daß also $\hat{f}(q) > C$. Dann gibt es einen minimalen Index M, so daß

$$f_M(q) = \hat{f}(q),$$

wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Einstandspreisfolge ist. Wegen der Minimalität gilt

$$f_{M-1}(q) < f_M(q).$$

Wir wählen nun eine Preiserhöhungsfolge

$$(M, (q = v_0, v_1, \ldots, v_{M-1})),$$

deren Existenz nach Lemma 3.3.1 garantiert ist. Die Folge muß azyklisch sein, da ν kostenminimal ist (siehe Argumentation im Beweis von Satz 3.3.1). Außerdem kann die Folge nach Lemma 2.1.2 die Senke s nicht enthalten, da ν maximal ist und es deshalb keinen Weg von der Quelle zur Senke im Restnetzwerk gibt, es also folglich keine Folge von Nachbarknoten der Quelle zur Senke geben kann. Da $f_0(v_M) = C+\Lambda$ erhalten wir durch sukzessives Einsetzen

$$f_M(q) = C + \Lambda - \sum_{j=0}^{M-2} \gamma_\nu(v_i, v_{i+1}).$$

Nun ist aber (nach Definition von Λ)

$$\sum_{j=0}^{M-2} \gamma_\nu(v_i, v_{i+1}) \geq \Lambda,$$

also $f_M(q) \leq C$, was der Annahme $\hat{f}(q) = f_M(q) > C$ widerspricht. ■

Satz 3.3.2: *(1) Der Fixpunkt $\hat{f}$ der Einstandspreisfolge bezüglich des durch Definition (3.62) gegebenen Anfangspreissystems f ist ein optimales Preissystem.*

(2) Zu jedem endlichen Netzwerk gibt es ein optimales Preissystem.

Beweis

(1) Da die Einstandspreisfolge monoton wachsend ist, folgt aus (3.63) — zusammen mit der Definition von A — daß $\hat{f}$ ausreichendes Gefälle hat. Wegen Beobachtung 3.3.1 ist ν außerdem höchst-profitabel bezüglich des Preissystems $\hat{f}$.

(2) Man nehme den Fixpunkt $\hat{f}$ der Einstandspreisiteration. ■

Bemerkung 3.3.1: *Man beachte, daß die hier präsentierte Methode der Preiserhöhungsfolgen auch ein algorithmisches Verfahren zur Ermittlung eines kostenminimalen, maximalen Flusses beinhaltet:*

> *Man führt eine neue Kante zwischen Senke und Quelle ein, der man große negative Kosten und eine große Kapazität zuordnet. Dadurch ist garantiert, daß jeder kostenminimale Fluß auch maximal wird. Nun starte man mit einem Fluß (z.B. dem Nullfluß) und einem beliebigen Preissystem (z.B. dem Nullpreissystem) und wende darauf die Einstandspreisiteration an. Diese terminiert entweder durch Auffinden eines Fixpunktes, oder man findet eine Preiserhöhungsfolge mit mehr als $|V|$ Knoten. Diese enthält, wie angeführt, einen Kreis mit negativen Kosten, den man zur Korrektur des Restnetzwerkes verwenden kann. Durch sukzessive Wiederholung dieser Konstruktion reduziert man schrittweise die Kosten des Flusses bis man schließlich einen Fluß mit minimalen Kosten erhält.*

Der dadurch erhaltene Algorithmus unterscheidet sich vom bekannten Cycle-Canceling-Algorithmus [41] insofern, als auf die vorangehende Bestimmung eines maximalen Flusses völlig verzichtet wird. Außerdem unterscheiden sich die Methoden zum Auffinden von Kreisen mit negativen Kosten. Abschließend sei noch betont, daß der Algorithmus große Anteile parallel ausführbarer Schritte (Berechnung der Einstandspreisiteration) enthält.

3.3.1 Anhang: Ein Überblick über Dual-Cost-Improvement-Algorithmen und den Cycle-Canceling-Algorithmus zur Bestimmung kostenminimaler Flüsse

In diesem Abschnitt möchten wir zum Vergleich ganz knapp einige bekannte, klassische Algorithmen zur Bestimmung kostenminimaler Flüsse in Bedarfsnetzwerken skizzieren, die gleichzeitig zu einem Fluß ν auch ein Preissystem f berechnen, so daß ν höchst-profitabel bezüglich f ist. Wie schon ausgeführt ergeben diese Algorithmen Preissysteme, die nicht unbedingt optimal sind.

Im klassischen Sinne entsprechen die Knotenpreise den Variablen des dualen Problemes, wenn die Bestimmung eines kostenminimalen Flusses als das primale Problem betrachtet wird. Die wesentliche Idee der Dual-Cost-Improvement-Algorithmen ist die sukzessive Veränderung der Knotenpreise[5)] mit dem Ziel, die dualen Kosten zu verbessern. Als Terminierungskriterium dienen oftmals die bekannten Optimalitätsbedingungen des komplementären Schlupfes (vgl. z.B. [18])

$$\begin{aligned}
f(j) - f(i) - \gamma(i,j) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \nu(i,j) = 0, \\
f(j) - f(i) - \gamma(i,j) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 \le \nu(i,j) \le \tau(i,j), \\
f(j) - f(i) - \gamma(i,j) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \nu(i,j) = \tau(i,j).
\end{aligned}$$

Die klassische Dualitätstheorie der linearen Optimierung liefert bei Erfüllung dieser Bedingungen die Optimalität des Lösungspaares (ν, f), d.h. ν ist ein kostenminimaler Fluß und f ist ein optimales Preissystem in dem Sinne, daß es eine optimale Lösung der zugeordneten dualen Aufgabe darstellt.

---

5) Üblicherweise auch als *Knotenpotentiale* bezeichnet.

Ein bekanntes Verfahren ist der bereits zitierte Sequential-Shortest-Path-Algorithmus [7, 35, 36]. Das Verfahren arbeitet iterativ und ausgehend vom initialen Nullfluß und Nullpreissystem wird in jedem Iterationsschritt ein Knotenpaar (x, y) (x Anbieter, y Nachfrager) ausgewählt. Es werden dann die Längen $d(\cdot)$ kürzester Wege zwischen x und allen übrigen Knoten im Restnetzwerk bestimmt und ferner ein kürzester Weg zwischen x und y. Der Fluß wird entlang dieses Weges maximal vergrößert. Tomizawa [50] und Edmonds & Karp [13] haben festgestellt, daß die Bestimmung der kürzesten Wege bezüglich der reduzierten Kosten[6)] erfolgen kann. Dies hat die algorithmische Konsequenz, daß zur Bestimmung kürzester Wege Algorithmen gewählt werden können, die identisches Vorzeichen für alle Kantenkosten voraussetzen (z.B. der Algorithmus von Dijkstra [11] oder Varianten davon [19]). Man beachte dabei, daß ein kürzester Weg bezüglich der reduzierten Kosten die folgende Eigenschaft hat: jede Kante (i, j) auf einem solchen Weg ist profitneutral, d.h. die reduzierten Kosten sind gleich Null. Der Algorithmus terminiert, wenn es keine unbalancierten Knoten mehr gibt. Der Fluß ist dann höchst-profitabel bezüglich der akkumulierten kürzesten Wegdistanzen d.

Ein weiterer Algorithmus ist der Primal-Duale-Algorithmus [18]. Er arbeitet nach einer ganz ähnlichen Strategie wie die Sequential-Shortest-Path-Methode. In jeder Iteration wird ein Shortest-Path-Problem gelöst und der Fluß wird entlang eines oder mehrerer kürzester Wege vergrößert. Zu diesem Zweck wird eine Maxflow-Berechnung zur größtmöglichen Berechnung des Flusses durchgeführt (simultan entlang mehrerer kürzester Wege). Das Maxflow-Problem wird dabei auf einem Teilgraphen N_ν^0 des Restnetzwerkes gelöst: N_ν^0 enthält nur die Kanten, für die die reduzierten Kosten gleich Null sind. Damit verursacht die Vergrößerung des Flusses keine Verschlechterung der Kosten, da ja nur über solche Kanten transportiert wird, die profitneutral sind. Eine Erhöhung der Kosten erfolgt nur dann, wenn auch die Stärke des Flusses vergrößert wird.

Beide Verfahren sind äquivalent in dem Sinne, daß sie die gleiche Folge von Knotenpreisen und Flüssen liefern (siehe z.B. [3]). Das Laufzeitverhalten beider Verfahren hängt neben der Knoten- und Kantenzahl auch von den Kapazitätsschranken bzw. den Angeboten ab, und man kann Beispiele konstruieren, die zu einem exponentiel-

[6)] Für ein Preissystem f und ein Kostenmaß γ wird die Größe $f(j) - f(i) - \gamma(i, j)$ üblicherweise als die *reduzierten Kosten* der Kante (i, j) bezeichnet.

len Laufzeitverhalten führen (vgl. [51]).

Praktische Verbesserungen dieser Algorithmen erhält man, wenn nicht versucht wird in jedem Schritt eine maximale Verbesserung der Knotenpreise zu erzielen, sondern wenn man sich mit einer einfachen Verbesserung begnügt. Diesen Ansatz verfolgen der Relaxations-Algorithmus von Bertsekas [2] und die verbesserte ϵ-Relaxation (siehe z.B. [6]). Obwohl von der Komplexität her unterlegen, zählen diese Verfahren in der Praxis zu den schnellsten Algorithmen zur Bestimmung kostenminimaler Flüsse (siehe [4], [5], [34]).

Einen anderen Ansatz verfolgt der Cycle-Canceling-Algorithmus [41]. Das Verfahren ist eine algorithmische Umsetzung von Lemma 2.1.4. Der Algorithmus bestimmt zunächst einen zulässigen, bedarfsdeckenden Fluß. Dies geschieht üblicherweise durch eine Maxflow-Berechnung, indem das Bedarfsnetzwerk durch die übliche Standardtransformation in ein Flußnetzwerk umgewandelt wird. Anschließend werden schrittweise alle Kreise negativer Länge (bezüglich der Kosten) im Restnetzwerk entfernt. Der Algorithmus terminiert, wenn das Restnetzwerk keine kostennegativen Kreise mehr enthält. Nach Lemma 2.1.4 ist der dann gefundene Fluß kostenminimal.

Die Bestimmung kostennegativer Kreise kann durch eine modifizierte Shortest-Path-Berechnung erfolgen. Für das resultierende Verfahren lassen sich dann ebenfalls Netzwerke konstruieren, die zu einem exponentiellen Laufzeitverhalten führen (vgl. [51]).

Ein besseres Laufzeitverhalten ergibt sich für diesen Algorithmus, wenn die Auswahl der Kreise mit negativen Kosten in einer speziellen Reihenfolge erfolgt. Goldberg & Tarjan [33] haben gezeigt, daß bei Bestimmung von Kreisen mit minimalen mittleren Kosten[7)] der Algorithmus ein streng polynomiales Laufzeitverhalten besitzt.

Durch Einsatz der auf Edmonds & Karp [13] zurückgehenden Scaling-Techniken lassen sich theoretische Verbesserungen der Algorithmen erzielen. Hierzu sei jedoch

---

[7)] Ist W ein Kreis, so definiert man die mittleren Kosten von W als

$$\Gamma(W,\gamma)/|W| = \sum_{(i,j)\in W} \gamma(i,j)/|W|.$$

Ein Kreis mit minimalen mittleren Kosten läßt sich in $\mathcal{O}(\min\{nm, \sqrt{n}m \log(nC)\})$ Zeit bestimmen (siehe [38], [39], [46]). Dabei ist C eine Schranke für das Kostenmaß.

auf [1] und auf die dortige umfangreiche Referenzliste verwiesen.

3.4 Ein abstrakter Kostenflußsatz auf Vektorverbänden

Um uns von der Notwendigkeit verschwindender Kosten im Unendlichen (bezüglich des Maßes τ) zu lösen, wird Satz 3.1.1 auf ein neues, völlig abstraktes Niveau gehoben. Wir betrachten folgende

Situation 3.4.1: *Sei Ω eine Menge und E ein reeller Vektorverband von Funktionen auf $\Omega \times \Omega$. Auf E sei ein bezüglich der punktweisen Ordnung monotones, lineares Funktional $\mathcal{J}$ gegeben. Weiterhin haben wir einen Funktionenraum E_Ω von Funktionen auf Ω, der in bezug auf E folgendes erfüllt:*

E.1 Für $f \in E_\Omega$ sind $f \otimes 1$ und $1 \otimes f$ Elemente von E.

E.2 Für $g \in E$ ist das Diagonalelement g_D, definiert durch

$$g_D(\omega) := g(\omega, \omega) \quad \forall \omega \in \Omega, \tag{3.64}$$

ein Element von E_Ω.

E.3 Für $g \in E$ und jedes $\tilde{\omega} \in \Omega$ ist $\hat{g}_{\tilde{\omega}}$, definiert durch

$$\hat{g}_{\tilde{\omega}}(\omega) := g(\tilde{\omega}, \omega) \quad \forall \omega \in \Omega, \tag{3.65}$$

ein Element von E_Ω.

Die in E.1 verwendeten Tensorprodukte sind wie üblich (siehe z.B. [16], Seite 179) definiert:

$$(f_1 \otimes f_2)(\omega_1, \omega_2) := f_1(\omega_1) f_2(\omega_2) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega.$$

Mit E_Ω^+ bezeichnen wir den positiven Kegel von E_Ω.

Definition 3.4.1: *(1) Wir nennen $\Omega \times \Omega$ ein* Bedarfsnetzwerk *und bezeichnen mit $\mathcal{J}$ seine* Kapazität.

(2) Ein lineares μ auf E_Ω nennen wir den Bedarf.

(3) Ein monotones, lineares ν auf E heißt Fluß.

(4) Bei gegebenem Bedarf μ heißt ein Fluß ν

(4.1) zulässig, *wenn $\nu \leq \mathcal{J}$ auf $E^+ := \{g \in E \mid g \geq 0\}$, und*

(4.2) bedarfsdeckend, *wenn $\mu(f) \leq \nu(1 \otimes f - f \otimes 1) \quad \forall f \in E_\Omega^+$.*

Kommentar zu Definition 3.4.1:

(1) Für den Fall $\chi_{A\times B} \in E$ sollte man, um die Verbindung zu Abschnitt 3.1 herzustellen,

$$\tau(A \times B) := \mathcal{J}(\chi_{A\times B})$$

als das Kapazitätsmaß auf $A \times B$ interpretieren, also die Kapazität von A nach B. Bei $\mathcal{J}$ handelt es sich demnach um die Verallgemeinerung des durch das bisherige Kapazitätsmaß gegebenen Integrals.

(2) Dabei sollte man für $\chi_A \in E_\Omega$ die Größe $\mu(\chi_A)$ als den Bedarf der Konsumentenmenge $A \subseteq \Omega$ interpretieren. Bei dem durch unsere abstrakte Definition des Bedarfs festgelegten Begriff handelt es sich folglich um eine Verallgemeinerung des Integrals bezüglich des bisherigen Bedarfsmaßes.

(3) Im Falle, daß die charakteristische Funktion $\chi_{A\times B}$ in E liegt, sollte man sich unter $\nu(\chi_{A\times B})$ den Fluß von A nach B vorstellen. Bei dem hier definierten Flußbegriff handelt es sich somit um die Verallgemeinerung des Integrals bezüglich des vorher gegebenen Flusses durch Dichten.

(4) Die Bedingung (4.1) legt dabei fest, daß ν die Kapazität nicht überschreitet, und Bedingung (4.2) fordert, daß ν den Bedarf μ übersteigt. Daß (4.2) die bisherige Bedingung der Bedarfsdeckung verallgemeinert, wird am besten ersichtlich, indem man sich dies für charakteristische Funktionen $f = \chi_A$ überlegt.

Satz 3.4.1 (Abstrakter Satz über kostenminimale Flüsse):
Es sei $\gamma \in E$ vorgegeben, so daß $\gamma_D = 0$, also $\gamma(\omega, \omega) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$, außerdem μ ein lineares Funktional auf E_Ω.

(1) Es gibt genau dann einen zulässigen, bedarfsdeckenden Fluß ν, wenn

$$\mu(f) \leq \mathcal{J}(\max(0, 1 \otimes f - f \otimes 1)) \quad \forall f \in E_\Omega^+. \tag{3.66}$$

(2) Gibt es einen zulässigen, bedarfsdeckenden Fluß, dann gibt es auch einen zulässigen, bedarfsdeckenden Fluß ν, so daß bezüglich des fixierten γ gilt

$$\nu(\gamma) = \sup\{\mu(f) - \mathcal{J}(\max(0, 1 \otimes f - f \otimes 1 - \gamma)) \mid f \in E_\Omega^+\}. \tag{3.67}$$

Bemerkung 3.4.1: *Um Satz 3.1.1 aus dieser Verallgemeinerung zu erhalten, muß man folgende Spezialisierungen vornehmen:*

(1) E = Raum der Funktionen, die absolut-integrabel bezüglich des gegebenen Kapazitätsmaßes τ sind.

(2) E_Ω = Raum der Funktionen, die absolut-integrabel bezüglich der beiden Marginalmaße τ_1 und τ_2 von τ auf Ω sind.

(3) $\mathcal{J}(h) := \int h d\tau \quad \forall h \in E.$

Außerdem sollte man beachten, daß die Bedingung (1) aus Satz 3.1.1 durch die formal schwächere Bedingung (3) (Gleichung (3.28)) ersetzt wurde. Diese leichte Abschwächung ist nötig, da sich bezüglich der zugrundeliegenden Situation mangels geeigneter Lokalisierungsmöglichkeiten ein Analogon zu Bedingung (1) in Satz 3.1.1 nicht formulieren läßt. Darauf hatten wir ja bereits bei der Formulierung von Bedingung (3) hingewiesen.

Bevor wir zum Beweis des Satzes gehen können, müssen wir geschickt einige Abbildungen, Ordnungen und Räume definieren.

In E_Ω geben wir eine Kollektion $\{\prec_{(\omega_1,\omega_2)} \mid \omega_1, \omega_2 \in \Omega\}$ von Ordnungsrelationen vor. Dabei sei $\prec_{(\omega_1,\omega_2)}$ definiert durch

$$f \prec_{(\omega_1,\omega_2)} g \iff f(\omega_2) \leq g(\omega_2) \text{ und } f(\omega_1) \geq g(\omega_1).$$

Für beliebiges $g \in E$ definieren wir einen sublinearen Operator $\mathcal{E}_g : E_\Omega \to E$ durch

$$\mathcal{E}_g(f)(\omega_1, \omega_2) := \max(0, f(\omega_2) - f(\omega_1) - g(\omega_1, \omega_2)),$$

oder formal

$$\mathcal{E}_g(f) := \max(0, 1 \otimes f - f \otimes 1 - g). \tag{3.68}$$

Mit $\mathcal{E}$ bezeichnen wir die Abbildung $\mathcal{E}_0$, also $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_g$ für $g = 0$. Für eine Abbildung $\varphi : \Omega \times \Omega \to E_\Omega$ definieren wir eine Funktion $P(\varphi) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$P(\varphi)(\omega_1, \omega_2) := \mathcal{E}(\varphi(\omega_1, \omega_2))(\omega_1, \omega_2) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega.$$

Mit Φ bezeichnen wir diejenigen Abbildungen $\varphi : \Omega \times \Omega \to E_\Omega$, so daß die auf $\Omega \times \Omega$ erklärten Funktionen

$$\begin{aligned} (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega &\mapsto (\varphi(\omega_1, \omega_2))(\omega_1), \\ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega &\mapsto (\varphi(\omega_1, \omega_2))(\omega_2) \end{aligned}$$

Elemente von E sind. Da E ein Vektorverband ist, sind dann auch die Maxima dieser Funktionen mit der Null Elemente von E; also liegt das Bild von Φ unter P in E. Auf Φ definieren wir

$$\pi(\varphi) := \mathcal{J}(P(\varphi)) \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{3.69}$$

Außerdem statten wir Φ mit einer Ordnungsrelation $\prec_\Phi$ aus, die durch

$$\varphi_1 \prec_\Phi \varphi_2 \iff \varphi_1(\omega_1, \omega_2) \prec_{(\omega_1, \omega_2)} \varphi_2(\omega_1, \omega_2) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega$$

erklärt ist. Letztendlich definieren wir eine Abbildung $L : E \to (E_\Omega)^{\Omega \times \Omega}$ durch

$$L(g)(\omega_1, \omega_2)(\omega) := g(\omega_1, \omega) \quad \forall g \in E, (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega, \omega \in \Omega.$$

Wegen E.1 und E.2 bildet L die Menge E nach Φ ab.

<u>Lemma 3.4.1:</u> *(1) Φ ist ein Vektorraum.*

(2) $P : \Phi \to E$ ist sublinear und monoton bezüglich $\prec_\Phi$.

(3) $\pi : \Phi \to \mathbb{R}$ ist sublinear und monoton bezüglich $\prec_\Phi$.

Beweis

(1) Für $\varphi \in \Phi$ bezeichnen wir mit φ_L, φ_R folgende Elemente von E:

$$\begin{aligned}\varphi_L(\omega_1, \omega_2) &:= (\varphi(\omega_1, \omega_2))(\omega_1),\\ \varphi_R(\omega_1, \omega_2) &:= (\varphi(\omega_1, \omega_2))(\omega_2).\end{aligned}$$

Für beliebige $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt nun

$$\begin{aligned}(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)_L &= \alpha_1\varphi_{1L} + \alpha_2\varphi_{2L},\\ (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)_R &= \alpha_1\varphi_{1R} + \alpha_2\varphi_{2R}.\end{aligned}$$

Also sind die linken Seiten aus E, damit gilt also $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \in \Phi$.

(2) Man beachte, daß

$$P(\varphi) = \max(0, \varphi_R - \varphi_L). \tag{3.70}$$

Da $\varphi \to \varphi_R$, $\varphi \to \varphi_L$ und $\varphi \to 0$ lineare Abbildungen sind, muß P offensichtlich sublinear sein. Außerdem überzeugt man sich leicht, daß aus $\varphi \prec_\Phi \tilde{\varphi}$ folgt $\varphi_R \leq \tilde{\varphi}_R$ und $\varphi_L \geq \tilde{\varphi}_L$. Die Verwendung dieser Beobachtung in (3.70) ergibt die Monotonie von P.

(3) Die Monotonie von π ist direkte Folge der Monotonie von P und der Monotonie von $\mathcal{J}$. Die Sublinearität von π folgt aus der von P und der Linearität von $\mathcal{J}$. ∎

Weiterhin fassen wir E_Ω als Teilraum von Φ über die konstanten Funktionen auf, d.h. jedes $f \in E_\Omega$ wird als $\tilde{f} : \Omega \times \Omega \to E_\Omega$ über

$$\tilde{f}(\omega_1, \omega_2)(\omega) := f(\omega) \quad \forall(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega, \omega \in \Omega \tag{3.71}$$

verstanden. Es gilt dann:

Lemma 3.4.2: *Für $f \in E_\Omega$ und $g \in E$ mit $g(\omega, \omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt*

$$P(\tilde{f} - L(g)) = \mathcal{E}_g(f).$$

Beweis

Durch Einsetzen erhält man

$$P(\tilde{f} - L(g))(\omega_1, \omega_2) = \max(0, f(\omega_2) - f(\omega_1) - g(\omega_1, \omega_2) + g(\omega_1, \omega_1)).$$

Da nach Voraussetzung $g(\omega_1, \omega_1) = 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned} P(\tilde{f} - L(g))(\omega_1, \omega_2) &= \max(0, f(\omega_2) - f(\omega_1) - g(\omega_1, \omega_2)) \\ &= \mathcal{E}_g(f)(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

■

3.4.1 Beweis von Satz 3.4.1

Die Notwendigkeit von (3.66) für die Existenz eines zulässigen, bedarfsdeckenden Flusses ist klar. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß wir aus (3.66) die Existenz eines zulässigen, bedarfsdeckenden Flusses mit den in (2) gegebenen Eigenschaften folgern können.

Wir fassen E_Ω^+ gemäß (3.71) als Teilkegel von Φ auf. Dann läßt sich Bedingung (3.66) schreiben als

$$\mu \leq \pi \quad \text{auf} \quad E_\Omega^+, \tag{3.72}$$

denn für $f \in E_\Omega^+$ folgt

$$\pi(f) = \mathcal{J}(P(f)) = \mathcal{J}(\mathcal{E}(f)(\omega_1, \omega_2)) = \mathcal{J}(\max(0, 1 \otimes f - f \otimes 1)).$$

Nach dem Sandwich-Satz in der Fortsetzungsversion 2.2.5 und mit Lemma 3.1.2 gibt es ein lineares, monotones $\hat{\nu}$ auf Φ mit

$$\mu \leq \hat{\nu} \quad \text{auf} \quad E_\Omega^+, \tag{3.73}$$

und mit

$$\hat{\nu} \leq \pi \quad \text{auf} \quad \Phi, \tag{3.74}$$

so daß

$$\hat{\nu}(L(\gamma)) = \sup\{\mu(f) - \pi(h) \mid f \prec_\Phi L(\gamma) + h, f \in E_\Omega^+, h \in \Phi\}. \tag{3.75}$$

Wir setzen nun

$$\nu := \hat{\nu} \circ L \tag{3.76}$$

und zeigen die Zulässigkeit dieser Konstruktion, daß also $\nu(g) \leq \mathcal{J}(g)$ für alle $g \in E^+$ gilt. Dies sieht man mit (3.76), (3.74) und (3.69) folgendermaßen:

$$\nu(g) = \hat{\nu}(L(g)) \leq \pi(L(g)) = \mathcal{J}(P(L(g))), \tag{3.77}$$

wobei sich $P(L(g))$ wegen der Positivität von g folgendermaßen bestimmt:

$$\begin{aligned} P(L(g))(\omega_1, \omega_2) &= \mathcal{E}(L(g)(\omega_1, \omega_2))(\omega_1, \omega_2) \\ &= \max(0, (L(g)(\omega_1, \omega_2))(\omega_2) - (L(g)(\omega_1, \omega_2))(\omega_1)) \\ &= \max(0, g(\omega_1, \omega_2) - g(\omega_1, \omega_1)) \\ &\leq \max(0, g(\omega_1, \omega_2)) \\ &= g(\omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{3.78}$$

Also erhalten wir aus (3.77) und (3.78) zusammen

$$\nu(g) \leq \mathcal{J}(g) \quad \forall g \in E^+.$$

Um zu zeigen, daß ν bedarfsdeckend ist, müssen wir die Abschätzung

$$\mu(f) \leq \nu(1 \otimes f - f \otimes 1) \quad \forall f \in E_\Omega^+$$

zeigen. Dafür bemerken wir zuerst, daß

$$\nu(f \otimes 1) = \hat{\nu}(L(f \otimes 1)) \leq \pi(L(f \otimes 1)) \leq J(P(L(f \otimes 1))), \tag{3.79}$$

wobei sich $P(L(f \otimes 1))$ wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} P(L(f \otimes 1))(\omega_1, \omega_2) &= \mathcal{E}(L(f \otimes 1)(\omega_1, \omega_2))(\omega_1, \omega_2) \\ &= \max(0, (L(f \otimes 1)(\omega_1, \omega_2))(\omega_2) - (L(f \otimes 1)(\omega_1, \omega_2))(\omega_1)) \\ &= \max(0, (f \otimes 1)(\omega_1, \omega_2) - (f \otimes 1)(\omega_1, \omega_1)) \\ &= \max(0, f(\omega_1) - f(\omega_1)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir dieses in (3.79) ein, so erhalten wir

$$\nu(f \otimes 1) \leq 0.$$

Diese Abschätzung verwenden wir nun zusammen mit (3.73) und der Tatsache, daß $L(1 \otimes f) = f$ gilt, für die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} \nu(1 \otimes f - f \otimes 1) &\geq \nu(1 \otimes f) \\ &= \hat{\nu}(L(1 \otimes f)) \\ &= \hat{\nu}(f) \\ &\geq \mu(f), \end{aligned}$$

was die gesuchte Ungleichung ergibt.

Wir gehen nun daran zu zeigen, daß ν die Beziehung (3.67) erfüllt. Die linke Seite von (3.75) ist gleich $\nu(\gamma)$ und da $h = f - L(\gamma)$ das minimale Element der Darstellung

$$f \prec_{\Phi} L(\gamma) + h$$

ist, wird die rechte Seite

$$r := \sup\{\mu(f) - \pi(f - L(\gamma)) \mid f \in E_{\Omega}^{+}\}.$$

Wegen Lemma 3.4.2 erhalten wir

$$\nu(\gamma) = r = \sup\{\mu(f) - \mathcal{J}(\mathcal{E}_{\gamma}(f)) \mid f \in E_{\Omega}^{+}\}.$$

Damit ist unter Verwendung von (3.68) die Beziehung (3.67) gezeigt. ■

Wir bereits gesagt, stellt Satz 3.4.1 ein Verallgemeinerung von Satz 3.1.1 dar. Durch die vollkommen abstrakte Betrachtungsweise sind wir nun von dem Problem entbunden, daß wir nur im Unendlichen verschwindende Kostenfunktionen behandeln können.

Kapitel 4

Algorithmische Sandwich-Theorie

Obwohl der Beweis des Satzes 3.1.1 im wesentlichen auf Standardhilfsmitteln der Funktionalanalysis basiert, sind Satz und Beweis insofern unbefriedigend, als es sich um einen nichtkonstruktiven Beweis der Verallgemeinerung einer in den Anwendungen wichtigen Situation handelt.

Grund für die fehlende Konstruierbarkeit, also der nichtkonstruktiven Aspekte im Beweis, ist die Verwendung des Sandwich-Satzes. Dieser hat den klassischen Satz von Hahn-Banach als direkte Konsequenz und durch leichte Modifikationen sowohl den Satz von Hahn-Banach wie den Satz von Krein-Milman für duale Einheitskugeln (siehe [23]). Bekanntlich ist der Satz von Krein-Milman für duale Einheitskugeln dem Auswahlaxiom der Mengenlehre effektiv äquivalent, d.h. die Äquivalenz läßt sich nur unter Verwendung der konstruktiven Axiome der Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre beweisen. Nach Cohen ist das Auswahlaxiom selbst von den übrigen Axiomen unabhängig (siehe [9] oder [15]), d.h. es läßt sich eine Mengenlehre begründen, die in sich widerspruchsfrei ist, und die von der Negation des Auswahlaxioms ausgeht.

Auch die alleinige Fassung des Hahn-Banach-Satzes ist vom konstruktiven Teil der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre unabhängig ([15]). Somit ist der Aufbau einer in sich widerspruchsfreien Mengenlehre möglich, in der beispielsweise der Sandwich-Satz nicht gelten kann. Da es sich bei Flußproblemen aber um praktische Probleme handelt, die in der Regel einer algorithmischen Behandlung zugänglich sind, ist die

Verwendung nichtkonstruktiver Teile der Mengenlehre für ihre Herleitung mehr als unbefriedigend. Es ist deshalb zu klären, in welcher Situation der Satz 3.1.1 konstruktiver Natur ist. Allerdings wollen wir diese Fragestellung nicht in der speziellen Situation behandeln, sondern stattdessen in größerer Allgemeinheit klären, d.h. wir wollen untersuchen, in welchen Bereichen der Sandwich-Satz von konstruktiver Natur ist.

Zur Klärung dieser Frage geben wir für den uns interessierenden Fall des Sandwich-Satzes für Kegel mit abzählbarer Basis einen Algorithmus mit abzählbar vielen Schritten zur Konstruktion des gesuchten Funktionals an. Dieser Algorithmus führt im Fall eines Kegels mit endlicher Basis natürlich auf einen Algorithmus mit endlich vielen Schritten. Der Algorithmus selbst ist universeller Natur, d.h. er ist überall dort anwendbar, wo „Sandwich-Argumente“ im Fall konvexer Kegel mit abzählbarer Basis verwendet werden können.

Der Algorithmus selbst ist deutlich in sequentiell und parallel ausführbare Schritte gegliedert. Dies ist bei einer praktischen Implementierung des Verfahrens ein nicht zu unterschätzender Vorteil. An dieser Stelle sei allerdings deutlich vor dem Mißverständnis gewarnt, daß der im folgenden präsentierte Sandwich-Algorithmus für alle Anwendungen, die unter der Verwendung des Sandwich-Satzes abgeleitet werden, ein optimales Verfahren oder auch nur einen Algorithmus mit akzeptabler Laufzeit liefert. Dies ist nicht der Fall. In vielen Anwendungen sind durch spezielle dedizierte Algorithmen beachtliche Verbesserungen gegenüber dem hier präsentierten universellen Algorithmus zu erhalten.

4.1 Sandwich-Algorithmus

Wir betrachten die folgende Situation:

Es sei gegeben ein prägeordneter Kegel $\mathcal{F}$ mit abzählbarer Basis $\{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei die Elemente $f \in \mathcal{F}$ als endliche, positive Linearkombination der χ_n darstellbar sind.

Bemerkung 4.1.1: *Der Algorithmus läuft in einer abzählbaren Schleife über die Basiselemente ab, und er besteht aus einer Folge abwechselnd zu berechnender Minima und Maxima. In jedem Durchlauf wird zunächst die Zahl*

$$p_i(T_{i-1}(\cdots T_1(\omega)\cdots)) \tag{4.1}$$

Algorithmus 4.1.1: Sandwich-Algorithmus

Eingabe: superlineares $\omega : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$,
monotones, sublineares $\pi : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\omega \leq \pi$

(1) lege eine Reihenfolge der Basiselemente $\{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ fest;
(2) $\mu := \omega$;
(3) for χ_i in $\{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ do
(4) $\quad p_i(\mu) := \inf\{\pi(\chi_i + g) - \mu(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ mit } \mu(g) \neq -\infty\}$;
(5) $\quad T_i(\mu)(f) := \sup\{\mu(g) + \lambda p_i(\mu) \mid \lambda\chi_i + g \prec f, \lambda \geq 0\}$;
(6) $\quad \mu := T_i(\mu)$;
(7) end_for;

bestimmt. In einem zweiten Schritt wird anschließend das Funktional

$$T_i(T_{i-1}(\cdots T_1(\omega)\cdots)) \tag{4.2}$$

ermittelt, welches — wie sich herausstellen wird — maximal auf χ_i ist. Insgesamt erhält man das gesuchte Funktional also durch die Hintereinanderausführung der T_i

$$\mu = \lim_{n\to\infty} T_n(\cdots T_2(T_1(\omega))\cdots) = \sup_{n\in\mathbb{N}} T_n(\cdots T_2(T_1(\omega))\cdots). \tag{4.3}$$

Die Komplexität des Algorithmus hängt primär von der Berechnung der Minima und der Maxima ab. Diese hat problemspezifisch zu erfolgen, so daß hier keine exakten Laufzeitabschätzungen durchgeführt werden können. Dies ist auch nicht so wichtig, da der Algorithmus hier mehr theoretische Bedeutung hat. Die Berechnung der $T_i(\mu)(f)$ in Schritt (5) kann für verschiedene f parallel erfolgen.

Zur Anwendung des Algorithmus formuliert man eine Problemstellung mit Hilfe sub- und superlinearer Funktionale. Die Konstruktion des eingebetteten linearen Funktionals führt dann zu der gesuchten Lösung.

Der Algorithmus maximiert nacheinander „in Richtung“ der Elemente χ_i unter Berücksichtigung der vorgegebenen Restriktionen. Der einmal erzielte Wert bleibt dabei von den nachfolgenden Schritten unbeeinträchtigt. Durchläuft man die Elemente des Erzeugendensystems in einer veränderten Reihenfolge, so ergibt sich ein verändertes Zielfunktional. Die Reihenfolge der Maximierung legt somit eine „Ausrichtung“ des Zielfunktionals fest.

Im folgenden bezeichnen wir für ein superlineares ω auf $\mathcal{F}$ und monotones, sublineares π auf $\mathcal{F}$ mit $\omega \leq \pi$ mit $\mathrm{Lin}(\omega, \pi)$ die Menge aller monotonen, linearen Funktionale zwischen ω und π, also

$$\mathrm{Lin}(\omega, \pi) := \{\nu \mid \nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist monoton und linear mit } \omega \leq \nu \leq \pi \text{ auf } \mathcal{F}\}. \quad (4.4)$$

Satz 4.1.1: *Besitzt der Kegel eine endliche Basis, so terminiert der Algorithmus. Nach dem Durchlaufen des Algorithmus gilt dann:*

(1) Es ist $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein monotones, lineares Funktional mit $\omega \leq \mu \leq \pi$.

(2) Das Funktional μ ist ein Extrempunkt von $\mathrm{Lin}(\omega, \pi)$.

Im Falle einer abzählbaren Basis besitzt das gemäß (4.3) gebildete Funktional μ ebenfalls die Eigenschaften (1) und (2).

4.1.1 Hilfsmittel für den Beweis des Satzes

Für die hier dargelegten Hilfsmittel zum Beweis des Satzes ist die Voraussetzung, daß es sich um einen Kegel mit abzählbarer Basis zu handeln hat, unwesentlich. Wir formulieren sie deshalb allgemeiner.

In diesem Abschnitt seien $\mathcal{F}$ ein prägeordneter Kegel, $\pi : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein monotones, sublineares Funktional und $\xi : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein superlineares Funktional mit $\xi \leq \pi$. Mit $\mathrm{S}^{>}(\xi, \pi)$ bezeichnen wir die superlinearen Funktionale $\hat{\xi}$ mit $\xi \leq \hat{\xi} \leq \pi$. Nach Voraussetzung ist $\mathrm{S}^{>}(\xi, \pi)$ nichtleer.

Es sei χ ein beliebiges, jedoch festgewähltes Element aus $\mathcal{F}$. Wir suchen dasjenige Funktional $\hat{\xi} \in \mathrm{S}^{>}(\xi, \pi)$, welches auf χ maximal ist. Eine offensichtlich notwendige Bedingung für $\hat{\xi}$ ist bei beliebigem $g \in \mathcal{F}$

$$\hat{\xi}(\chi) + \hat{\xi}(g) \leq \hat{\xi}(\chi + g) \leq \pi(\chi + g),$$

also auch

$$\hat{\xi}(\chi) \leq \inf\{\pi(\chi + g) - \xi(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ und } \xi(g) \neq -\infty\}. \quad (4.5)$$

Die rechte Seite von (4.5) bezeichnen wir mit $p_\chi(\xi)$.

Wir sind natürlich nicht an einem Funktional nur auf χ interessiert, sondern an einem Funktional auf ganz $\mathcal{F}$. Wir versuchen also die durch (4.5) charakterisierten Funktionale auf ganz $\mathcal{F}$ fortzusetzen, d.h. wir suchen $\hat{\xi}(f)$ für beliebiges $f \in \mathcal{F}$. Dabei sollen Superlinearität und (4.5) natürlich erhalten bleiben. Sei also $f \in \mathcal{F}$ beliebig, dann läßt sich f schreiben als $f = g + \lambda\chi$ mit geeigneten $g \in \mathcal{F}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Es gilt dann

$$\hat{\xi}(f) = \hat{\xi}(g + \lambda\chi) \geq \hat{\xi}(g) + \lambda\hat{\xi}(\chi) \geq \xi(g) + \lambda p_\chi(\xi),$$

und daraus entwickeln wir den **Ansatz**:

$$\hat{\xi}(f) := \sup\{\xi(g) + \lambda p_\chi(\xi) \mid g + \lambda\chi \prec f, g \in \mathcal{F}, \lambda \geq 0\}.$$

Da wir von einem beliebigen Element χ und einem beliebigen superlinearen Funktional $\xi \leq \pi$ ausgegangen sind, haben wir somit für jedes Element $\chi \in \mathcal{F}$ ein Funktional

$$\hat{\xi}(f) = T_\chi(\xi)(f) := \sup\{\xi(g) + \lambda p_\chi(\xi) \mid g + \lambda\chi \prec f, g \in \mathcal{F}, \lambda \geq 0\} \tag{4.6}$$

definiert, wobei

$$p_\chi(\xi) := \inf\{\pi(\chi + g) - \xi(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ und } \xi(g) \neq -\infty\}.$$

<u>**Lemma 4.1.1:**</u> *Das in (4.6) definierte Funktional $\hat{\xi}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\hat{\xi}$ ist monoton und es gilt $\hat{\xi} \in \mathrm{S}^>(\xi, \pi)$,*

(2) $\hat{\xi}(\chi) = p_\chi(\xi)$,

(3) $\hat{\xi}(\chi) = \sup\{\tilde{\xi}(\chi) \mid \tilde{\xi} \in \mathrm{S}^>(\xi, \pi)\}$.

Beweis

Für den Beweis von (1) und (2) haben wir zu zeigen:

B.1 $\hat{\xi}$ ist superlinear,

B.2 es gilt die Abschätzung $\xi \leq \hat{\xi} \leq \pi$,

B.3 $\hat{\xi}$ ist monoton,

B.4 $\hat{\xi}(\chi) \geq p_\chi(\xi)$ und

B.5 $\hat{\xi}(\chi) \leq p_\chi(\xi)$.

Der Nachweis dieser Eigenschaften wird in mehreren Schritten durchgeführt. Zunächst konstruieren wir eine Hilfsfunktion $\hat{p}_\chi(\xi) : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\hat{p}_\chi(\xi)(f) := \begin{cases} \lambda p_\chi(\xi), & \text{falls } f = \lambda\chi, \lambda \geq 0 \\ -\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Funktional besitzt gewisse Eigenschaften, die wir im folgenden zunächst zeigen.

(1) $\hat{p}_\chi(\xi)$ ist superlinear.
Es sind die Homogenität und die Superadditivität nachzurechnen.

Homogenität: Es seien $\lambda \geq 0$, $f \in \mathcal{F}$ mit $f = \lambda\chi$ und sei $\alpha \geq 0$ beliebig. Dann gilt $\alpha f = \alpha\lambda\chi$, und es folgt $\hat{p}_\chi(\xi)(\alpha f) = (\alpha\lambda)p_\chi(\xi) = \alpha(\lambda p_\chi(\xi)) = \alpha\hat{p}_\chi(\xi)(f)$. Ist $f \in \mathcal{F}$ mit $f \neq \lambda\chi$ für $\lambda \geq 0$, so folgt $\hat{p}_\chi(\xi)(\alpha f) = -\infty = \alpha(-\infty) = \alpha\hat{p}_\chi(\xi)(f)$.

Superadditivität: Es sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

(1.1) Sind $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ mit $f_1+f_2 = \lambda\chi = (\lambda_1+\lambda_2)\chi$ und $f_1 = \lambda_1\chi, f_2 = \lambda_2\chi$, so ist

$$\begin{aligned} \hat{p}_\chi(\xi)(f_1 + f_2) &= \lambda p_\chi(\xi) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)p_\chi(\xi) \\ &= \lambda_1 p_\chi(\xi) + \lambda_2 p_\chi(\xi) \\ &= \hat{p}_\chi(\xi)(f_1) + \hat{p}_\chi(\xi)(f_2). \end{aligned}$$

(1.2) Sind $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ mit $f_1 + f_2 = \lambda\chi$ und $\nexists \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ mit $f_1 = \lambda_1\chi$ und $f_2 = \lambda_2\chi$, so ist $\hat{p}_\chi(\xi)(f_1 + f_2) = \lambda p_\chi(\xi) \geq -\infty + -\infty = \hat{p}_\chi(\xi)(f_1) + \hat{p}_\chi(\xi)(f_2)$.

(1.3) Sind $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ mit $\nexists \lambda \geq 0 : f_1 + f_2 = \lambda\chi$, so können nicht beide Elemente Vielfache von χ sein. ObdA: Für f_1 existiert kein $\lambda_1 \geq 0$ mit $f_1 = \lambda_1\chi$. Dann folgt $\hat{p}_\chi(\xi)(f_1 + f_2) = -\infty = -\infty + \hat{p}_\chi(\xi)(f_2) = \hat{p}_\chi(\xi)(f_1) + \hat{p}_\chi(\xi)(f_2)$.

(2) Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\hat{p}_\chi(\xi)(f_1) + \xi(f_2) \leq \pi(f_1 + f_2). \tag{4.7}$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(2.1) Ist $\hat{p}_\chi(\xi)(f_1) = -\infty$, so gilt (4.7) sicherlich.

(2.2) Sei also $\hat{p}_\chi(\xi)(f_1) \neq -\infty$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\hat{p}_\chi(\xi)(f_1) + \xi(f_2) \;\; = \\
&\quad = \lambda \inf\{\pi(\chi + g) - \xi(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ mit } \xi(g) \neq -\infty\} + \xi(f_2) \\
&\quad = \inf\{\pi(f_1 + \lambda g) - \xi(\lambda g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ mit } \xi(g) \neq -\infty\} + \xi(f_2) \\
&\quad \leq \pi(f_1 + \lambda(\tfrac{1}{\lambda} f_2)) - \xi(\lambda(\tfrac{1}{\lambda} f_2)) + \xi(f_2) \\
&\quad = \pi(f_1 + f_2).
\end{aligned}$$

Nun haben wir die notwendigen Hilfsmittel zur Hand, um die eigentliche Aussage des Lemmas zu zeigen. Wir betrachten nun das Funktional $\hat{\xi}$, welches wir mit Hilfe der Hilfsfunktion $\hat{p}_\chi$ schreiben als

$$\hat{\xi}(f) = \sup\{\xi(g) + \hat{p}_\chi(\xi)(t) \mid g + t \prec f, t = \lambda\chi, g \in \mathcal{F}, \lambda \geq 0\}.$$

Beweis von B.1: $\hat{\xi}$ ist superlinear.

Homogenität: Sei $\alpha \geq 0, f \in \mathcal{F}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_i(\alpha f) &= \sup\{\xi(g) + \hat{p}_\chi(\xi)(t) \mid g + t \prec \alpha f, t = \lambda\chi, g \in \mathcal{F}, \lambda \geq 0\} \\
&= \alpha \sup\{\xi(g) + \lambda p_\chi(\xi) \mid g + \lambda\chi \prec f, g \in \mathcal{F}, \lambda \geq 0\} \\
&= \alpha\hat{\xi}(f).
\end{aligned}$$

Superadditivität: Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Dann liefert die Superlinearität von ξ

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}(f_1+f_2) &= \sup\{\xi(g)+\hat{p}_\chi(\xi)(t) \mid g+t \prec f_1+f_2, t=\lambda\chi, \\
&\qquad g\in\mathcal{F}, \lambda\geq 0\} \\
&\geq \sup\{\xi(g_1+g_2)+(\lambda_1+\lambda_2)p_\chi(\xi) \mid g_1+\lambda_1\chi \prec f_1, \\
&\qquad g_2+\lambda_2\chi \prec f_2, g_1, g_2\in\mathcal{F}, \lambda_1\geq 0, \lambda_2\geq 0\} \\
&= \sup\{\xi(g_1)+\lambda_1 p_\chi(\xi) \mid g_1+\lambda_2\chi \prec f_1, g_1\in\mathcal{F}, \lambda_1\geq 0\} \\
&\quad +\sup\{\xi(g_2)+\lambda_2 p_\chi(\xi) \mid g_2+\lambda_2\chi \prec f_2, g_2\in\mathcal{F}, \lambda_2\geq 0\} \\
&= \hat{\xi}(f_1)+\hat{\xi}(f_2).
\end{aligned}$$

Beweis von B.2: Es gilt die Abschätzung $\xi \leq \hat{\xi} \leq \pi$. Es sei $f \in \mathcal{F}$.

(1) Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
\xi(f) &= \xi(f)+0 \\
&= \xi(f)+0p_\chi(\xi) \\
&\leq \sup\{\xi(g)+\lambda p_\chi(\xi) \mid g+\lambda\chi \prec f, g\in\mathcal{F}, \lambda\geq 0\} \\
&= \hat{\xi}(f).
\end{aligned}$$

(2) Die Monotonie von π und (4.7) führen zu

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}(f) &= \sup\{\xi(g)+\hat{p}_\chi(\xi)(t) \mid g+t \prec f, t=\lambda\chi, g\in\mathcal{F}, \lambda\geq 0\} \\
&\leq \sup\{\pi(g+\lambda\chi) \mid g+\lambda\chi \prec f, g\in\mathcal{F}, \lambda\geq 0\} \\
&= \pi(f).
\end{aligned}$$

Beweis von B.3: $\hat{\xi}$ ist monoton.

Seien f_1, f_2 mit $f_1 \prec f_2$. Aus der Transitivität von $\prec$ folgt

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}(f_1) &= \sup\{\xi(g)+\lambda p_\chi(\xi) \mid g+\lambda\chi \prec f_1, g\in\mathcal{F}, \lambda\geq 0\} \\
&\leq \sup\{\xi(g)+\lambda p_\chi(\xi) \mid g+\lambda\chi \prec f_2, g\in\mathcal{F}, \lambda\geq 0\} \\
&= \hat{\xi}(f_2).
\end{aligned}$$

Beweis von B.4: Es ist

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}(\chi) &= \sup\{\xi(g) + \lambda p_\chi(\xi) \mid g + \lambda\chi \prec \chi, g \in \mathcal{F}, \lambda \geq 0\} \\
&\geq \sup\{\alpha\xi(\chi) + \lambda p_\chi(\xi) \mid \alpha\chi + \lambda\chi \prec \chi, \alpha \geq 0, \lambda \geq 0\} \\
&= \sup\{\alpha\xi(\chi) + \lambda p_\chi(\xi) \mid \alpha + \lambda = 1\} \\
&\geq \sup\{p_\chi(\xi)\} \\
&\geq p_\chi(\xi),
\end{aligned}$$

da in der Bestimmung des Supremums der Fall $\alpha = 0, \lambda = 1$ enthalten ist.

Beweis von B.5: Wegen der Superlinearität von $\hat{\xi}$ und da nach Konstruktion $\xi \leq \hat{\xi}$, gilt für beliebiges $g \in \mathcal{F}$

$$\hat{\xi}(\chi) + \xi(g) \leq \hat{\xi}(\chi) + \hat{\xi}(g) \leq \hat{\xi}(\chi + g) \leq \pi(\chi + g),$$

also

$$\hat{\xi}(\chi) \leq \inf\{\pi(\chi + g) - \xi(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ mit } \xi(g) \neq -\infty\} = p_\chi(\xi). \tag{4.8}$$

Die Tatsache (3), daß $\hat{\xi}(\chi)$ maximal ist, ergibt sich daraus, daß (4.8) für jedes Element von $\mathrm{S}^{>}(\xi, \pi)$ gelten muß, und damit die schon gezeigte Eigenschaft (4) die Maximalität bedingt. ■

Lemma 4.1.2: *Es sei $\nu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein superlineares und $\pi : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein sublineares Funktional mit*

$$\nu(f) = \inf\{\pi(f + g) - \nu(g) \mid g \in \mathcal{F} \textit{ mit } \nu(g) \neq -\infty\}. \tag{4.9}$$

Dann ist ν linear.

Beweis

Da ν superlinear ist, genügt es, die Subadditivität von ν nachzuweisen. Seien dazu

$f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\nu(f_1 + f_2) &= \inf\{\pi((f_1 + f_2) + g) - \nu(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ mit } \nu(g) \neq -\infty\} \\
&= \inf\{\pi(f_1 + f_2 + 2g) - \nu(2g) \mid 2g \in \mathcal{F} \text{ mit } \nu(2g) \neq -\infty\} \\
&= \inf\{\pi((f_1 + g) + (f_2 + g)) - (\nu(g) + \nu(g)) \mid 2g \in \mathcal{F} \text{ mit } \nu(2g) \neq -\infty\} \\
&\leq \inf\{\pi(f_1 + g) + \pi(f_2 + g) - \nu(g) - \nu(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ mit } \nu(g) \neq -\infty\} \\
&= \inf\{\pi(f_1 + g) - \nu(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ mit } \nu(g) \neq -\infty\} \\
&\quad + \inf\{\pi(f_2 + g) - \nu(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ mit } \nu(g) \neq -\infty\} \\
&= \nu(f_1) + \nu(f_2).
\end{aligned}$$

■

4.1.2 Der Beweis von Satz 4.1.1 (Sandwich-Algorithmus)

Wir zeigen die Gültigkeit von (1) und (2) für Kegel mit abzählbarer Basis. Die Terminierung ist im Falle einer endlichen Basis offensichtlich, wenn die zu bestimmenden Infima und Suprema berechenbar sind. Die Gültigkeit von (1) und (2) für den Fall einer endlichen Basis ist eine direkte Konsequenz aus der Gültigkeit dieser Aussagen für die allgemeinere Situation einer abzählbaren Basis.

Es seien jetzt ω und π die in der Formulierung des Sandwich-Theorems gegebenen Funktionale. Im folgenden wollen wir ausgehend von ω die Hintereinanderausführung der T_i betrachten. Zu diesem Zweck definieren wir zur Abkürzung

$$\mu_i := T_i(\cdots T_2(T_1(\omega))\cdots) \quad \text{für jedes } i = 1, 2, \ldots .$$

Nach Konstruktion und Lemma 4.1.1(1) gilt

$$\mu_{i+1} \in \mathrm{S}^{>}(\mu_i, \pi) \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots ,$$

also

$$\omega \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_{n-1} \leq \mu_n \leq \ldots \leq \pi. \tag{4.10}$$

Weiterhin gilt für alle $\nu \in \mathrm{S}^{>}(\mu_{i-1}, \pi)$ nach Lemma 4.1.1(3), daß $\mu_i(\chi_i) \geq \nu(\chi_i)$, denn die μ_i waren ja so bestimmt, daß sie maximal auf χ_i sind. Den Ungleichungen (4.10) entnehmen wir $\mathrm{S}^{>}(\mu_i, \pi) \subseteq \mathrm{S}^{>}(\mu_j, \pi)$ für $i \geq j$ und somit folgt insgesamt

$$\mu_j(\chi_k) = \mu_i(\chi_k) \quad \text{für } 1 \leq k \leq j \leq i. \tag{4.11}$$

Da nach (4.10) die Menge der monotonen, superlinearen μ_i nach oben gerichtet ist, folgt auch, daß das Supremum selbst monoton und und superlinear ist (einfache Rechnung). Wir zeigen nun, daß das Funktional linear ist. Dazu nehmen wir ein beliebiges $f \in \mathcal{F}$, welches wir nach Voraussetzung als endliche, positive Linearkombination über die χ_i darstellen können, also

$$f = \lambda_1 \chi_{i_1} + \cdots + \lambda_n \chi_{i_n},\ \lambda_i \geq 0.$$

Dann gilt einerseits

$$\begin{aligned}
\mu(f) &= \mu(\lambda_1 \chi_{i_1} + \cdots + \lambda_n \chi_{i_n}) \\
&\geq \lambda_1 \mu(\chi_{i_1}) + \cdots + \lambda_n \mu(\chi_{i_n}) \\
&= \lambda_1 p_1(\omega) + \lambda_2 p_2(\mu_1) + \cdots + \lambda_n p_n(\mu_{n-1}) \\
&= \lambda_1 \inf\{\pi(\chi_{i_1} + g) - \omega(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ und } \omega(g) \neq -\infty\} + \cdots \\
&\qquad \cdots + \lambda_n \inf\{\pi(\chi_{i_n} + g) - \mu_{n-1}(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ und } \mu_{n-1}(g) \neq -\infty\} \\
&= \inf\{(\pi(\lambda_1 \chi_{i_1} + \lambda_1 g) - \omega(\lambda_1 g)) + \cdots (\pi(\lambda_n \chi_{i_n} + \lambda_n g) - \\
&\qquad -\mu_{n-1}(\lambda_n g)) \mid g \in \mathcal{F} \text{ und } \omega(g) \neq -\infty, \ldots, \mu_{n-1}(g) \neq -\infty\} \\
&\geq \inf\{(\pi(\lambda_1 \chi_{i_1} + \cdots + \lambda_n \chi_{i_n} + (\lambda_1 + \cdots \lambda_n) g) - (\omega(\lambda_1 g) + \cdots \\
&\qquad \cdots + \mu_{n-1}(\lambda_n g)) \mid g \in \mathcal{F} \text{ und } \omega(g) \neq -\infty, \ldots, \mu_{n-1}(g) \neq -\infty\} \\
&\geq \inf\{\pi(f + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) g) - (\mu(\lambda_1 g) + \cdots + \mu(\lambda_n g)) \mid \\
&\qquad g \in \mathcal{F} \text{ und } \mu(g) \neq -\infty\} \\
&\geq \inf\{\pi(f + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) g) - (\mu((\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) g)) \mid \\
&\qquad g \in \mathcal{F} \text{ und } \mu(g) \neq -\infty\} \\
&= \inf\{\pi(f + g) - \mu(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ und } \mu(g) \neq -\infty\}.
\end{aligned}$$

Andererseits folgt wegen $\mu \in \mathrm{S}^{>}(\omega, \pi)$ für beliebiges $g \in \mathcal{F}$: Es ist $\mu(f) + \mu(g) \leq \mu(f+g) \leq \pi(f+g)$, also $\mu(f) \leq \pi(f+g) - \mu(g)$. Somit folgt

$$\mu(f) \leq \inf\{\pi(f+g) - \mu(g) \mid g \in \mathcal{F} \text{ und } \mu(g) \neq -\infty\}.$$

Insgesamt gilt also $\mu(f) = \inf\{\pi(f+g) - \mu(g) \mid g \in \mathcal{F}$ und $\mu(g) \neq -\infty\}$. Wir können nun Lemma 4.1.2 anwenden und erhalten das gewünschte Ergebnis, d.h. μ ist linear.

Um zu sehen, daß μ ein Extrempunkt[1)]von $\mathrm{Lin}(\omega, \pi)$ ist, betrachten wir $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{Lin}(\omega, \pi)$ und $0 < \lambda < 1$ mit

$$\mu \leq \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2. \tag{4.12}$$

Wir setzen nun $\mu_0 := \omega$, dann sind $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{S}^{>}(\mu_0, \pi)$.

Weiterhin behaupten wir, daß aus $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{S}^{>}(\mu_i, \pi)$ die Gültigkeit von $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{S}^{>}(\mu_{i+1}, \pi)$ folgt. Nehmen wir zum Beweis dieser Behauptung ein beliebiges $f \in \mathcal{F}$. Dann gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned}
\mu_{i+1}(f) &= \sup\{\mu_i(g) + \hat{\lambda} p_{i+1}(\mu_i) \mid g + \hat{\lambda}\chi_i \prec f, g \in \mathcal{F}, \hat{\lambda} \geq 0\} \\
&\leq \sup\{\nu_1(g) + \hat{\lambda}\mu_{i+1}(\chi_{i+1}) \mid g + \hat{\lambda}\chi_i \prec f, g \in \mathcal{F}, \hat{\lambda} \geq 0\}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $\nu_1 \in \mathrm{S}^{>}(\mu_i, \pi)$ und Lemma 4.1.1(2) benutzt. Wenn also

$$\mu_{i+1}(f) > \nu_1(f),$$

dann muß wegen Linearität und Monotonie auch

$$\mu_{i+1}(\chi_{i+1}) > \nu_1(\chi_{i+1})$$

gelten. Wegen $\nu_2 \in \mathrm{S}^{>}(\mu_i, \pi)$ und Lemma 4.1.1(3) gilt aber auf jeden Fall

$$\mu_{i+1}(\chi_{i+1}) \geq \nu_2(\chi_{i+1}).$$

[1)]Wir verwenden hier die übliche Adaption des Extrempunktbegriffes für konvexe Kegel: $\mu \in \mathcal{K}$ (konvexe Menge von linearen Funktionalen auf einem Kegel) ist *Extrempunkt* von $\mathcal{K}$, wenn aus $0 < \lambda < 1$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{K}$ mit

$$\mu \leq \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2$$

folgt, daß $\mu = \nu_1 = \nu_2$.

Durch Addition dieser Ungleichungen würden wir einen Widerspruch zu (4.12) erhalten. Also haben wir für beliebiges $f \in \mathcal{F}$ die Gültigkeit von $\nu_1(f) \geq \mu_{i+1}(f)$. Gleiches zeigen wir auf dieselbe Weise für ν_2. Damit haben wir $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{S}^{>}(\mu_{i+1}, \pi)$ und durch vollständige Induktion

$$\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{S}^{>}(\mu_i, \pi) \quad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

Da nun

$$\mu = \sup \bigcap \{\mathrm{S}^{>}(\mu_k, \pi) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

gilt, folgt mit (4.12) $\nu_1 = \mu$ und $\nu_2 = \mu$. ∎

Literaturverzeichnis

[1] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, and J.B. Orlin. *Network Flows.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[2] D.P. Bertsekas. A Unified Framework for Primal-Dual Methods in Minimum Cost Network Flow Problems. *Mathematical Programming*, 32:125–145, 1985.

[3] D.P. Bertsekas. *Linear Network Optimization: Algorithms and Codes.* The MIT Press, Cambridge (Massachusetts)-London, 1991.

[4] D.P. Bertsekas and P. Tseng. The Relax Codes for Linear Minimum Cost Network Flow Problems. *Annals of Operations Research*, 13:125–190, 1988.

[5] D.P. Bertsekas and P. Tseng. RELAX-IV: A Faster Version of the RELAX Code for Solving Minimum Cost Flow Problems. Technical report, Preprint, November 1994.

[6] D.P. Bertsekas and J.N. Tsitsiklis. *Parallel and Distributed Computation – Numerical Methods.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

[7] R.G. Busacker and P.J. Gowen. A procedure for determining a family of minimal-cost network flow patterns. Technical Report 15, Operational Research Office, J. Hopkins University, Baltimore, 1961.

[8] R.G. Busacker and T.L. Saaty. *Finite Graphs and Networks.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1965.

[9] P.J. Cohen. *Set Theory and Continuum Hypothesis.* W.A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1966.

[10] G.B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[11] E.W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1:269–271, 1959.

[12] E.A. Dinic. Algorithm for Solution of a Problem of Maximal Flow in a Network with Power Estimation. *Soviet Mathematics Doklady*, 11:1277–1280, 1970.

[13] J. Edmonds and R.M. Karp. Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems. *Journal of the ACM*, 19(2):248–264, 1972.

[14] S. Even. *Graph Algorithms.* Pitman Publishing Ltd., London, 1979.

[15] J. Felix. Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit. In *Jahrbuch Überblicke Mathematik.* Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich, 1977.

[16] K. Floret. *Maß- und Integrationstheorie.* B.G. Teubner Stuttgart, 1981.

[17] L.R. Ford and D.R. Fulkerson. Maximal Flow through a Network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8:399–404, 1956.

[18] L.R. Ford Jr. and D.R. Fulkerson. *Flows in Networks.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

[19] M.L. Fredman and R.E. Tarjan. Fibonacci Heaps and their uses in Improved Network Optimization Algorithms. *Journal of the ACM*, 34(3):596–615, 1987.

[20] B. Fuchssteiner. Sandwich theorems and Lattice semigroups. *Journal of Functional Analysis*, 16:1–14, 1974.

[21] B. Fuchssteiner. An Abstract Disintegration Theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, 94(2):303–309, 1981.

[22] B. Fuchssteiner. Disintegration Methods in Mathematical Economics. In O. Moeschlin and D. Pallaschke, editors, *Game Theory and Mathematical Economics*, pages 193–204, Amsterdam-New York, 1981. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), Amsterdam.

[23] B. Fuchssteiner. Exposed Fixpoints in Order-Structures. In *Aspects of Mathematics and its Applications*, pages 359–376. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), Amsterdam, 1986.

[24] B. Fuchssteiner and W. Lusky. *Convex Cones*, volume 56 of *Mathematics Studies*. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), Amsterdam-New York-Oxford, 1981.

[25] B. Fuchssteiner and K. Morisse. Infinite networks: Minimal Cost Flow. *Applied Mathematical Letters*, 9(1):89–93, 1996.

[26] B. Fuchssteiner and A. Schröder. Production and Distribution. In O. Moeschlin and D. Pallaschke, editors, *Game Theory and related Topics*. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), Amsterdam, 1979.

[27] D.R. Fulkerson. An Out-of-Kilter Method for Minimal-Cost Flow Problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 9(1):18–27, March 1961.

[28] D. Gale. A Theorem on Flows in Networks. *Pacific Journal of Mathematics*, pages 1073–1082, 1957.

[29] D. Gale. *The Theory of Linear Economic Models*. McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1960.

[30] D. Gale, H.W. Kuhn, and A.W. Tucker. Linear Programming and the Theory of Games. In T.C. Koopmans, editor, *Activity Analysis of Production and Allocation*, 1951.

[31] Z. Galil. An $\mathcal{O}(V^{\frac{5}{3}}E^{\frac{2}{3}})$ Algorithm for the Maximal Flow Problem. *Acta Informatica*, 14:221–242, 1980.

[32] Z. Galil and A. Namaad. An $\mathcal{O}(EV\log^2 V)$ Algorithm for the Maximal Flow Problem. *Journal of Computer and System Sciences*, 21(2):203–217, October 1980.

[33] A.V. Goldberg and R.E. Tarjan. Finding Minimum-Cost Circulations by Canceling Negative Cycles. *Journal of the ACM*, 36(4):873–886, October 1989.

[34] M.D. Grigoriadis. An efficient implementation of the network simplex algorithm. *Mathematical Programming Studies*, 26:83–111, March 1986.

[35] M. Iri. A New Method of Solving Transportation-Network Problems. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 3(1 & 2):27–87, October 1960.

[36] W.S. Jewell. Optimal flow through networks. Technical Report 8, Operations Research Center, MIT, Cambridge, 1958.

[37] D. Jungnickel. *Graphen, Netzwerke und Algorithmen.* Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich, 1987.

[38] R.M. Karp. A characterization of the minimum cycle mean in a digraph. *Discrete Mathematics*, 23:309–311, 1978.

[39] R.M. Karp and J.B. Orlin. Parametric Shortest Path Algorithms with an Application to Cycle Staffing. *Discrete Applied Mathematics*, 3(1):37–45, 1981.

[40] A.V. Karzanov. Determining the Maximal Flow in a Network with Method of Preflows. *Soviet Mathematics Doklady*, 15:434–437, 1974.

[41] M. Klein. A primal method for minimal cost flows with applications to the assignment and transportation problems. *Management Science*, 14(3):205–220, November 1967.

[42] H. König and M. Neumann. *Mathematische Wirtschaftstheorie (mit einer Einführung in die konvexe Analysis)*, volume 100 of *Mathematical Systems in Economics.* Verlag Anton Hain, Königstein/Ts., 1986.

[43] E.L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[44] V.M. Malhotra, M.P. Kumar, and S.N. Maheshwari. An $\mathcal{O}(|V|^3)$ Algorithm for Finding Maximum Flows in Networks. *Information Processing Letters*, 7(6):277–278, October 1978.

[45] M. Neumann. A Ford-Fulkerson type Theorem concerning vector valued Flows in Infinite Networks. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 34(109):156–162, 1984.

[46] J.B. Orlin and R.K. Ahuja. New scaling algorithms for the assignment and minimum mean cycle problems. *Mathematical Programming*, 54:41–56, 1992.

[47] Y. Shiloach and U. Vishkin. An $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ Parallel MAX-FLOW Algorithm. *Journal of Algorithms*, 3:128–146, 1982.

[48] V. Strassen. The Existence of Probability Measures with given Marginals. *Annals of Mathematical Statistics*, 36:423–439, 1965.

[49] R.E. Tarjan. A Simple Version of Karzanov's Blocking Flow Algorithm. *Operations Research Letters*, 2(6):265–268, March 1984.

[50] N. Tomizawa. On Some Techniques Useful for Solution of Transportation Network Problems. *Networks*, 1:173–194, 1971.

[51] N. Zadeh. A Bad Network Problem for the Simplex Method and other Minimum Cost Flow Algorithms. *Mathematical Programming*, 5:255–266, 1973.